# Annexes 2

# Sommaire des annexes 2

# Les nombres naturels et entiers

## 1. Vocabulaire des opérations

### 1.1. Les quatre opérations fondamentales

| | Nom du premier nombre | Symbole | Nom du deuxième nombre | Nom du résultat |
|---|---|---|---|---|
| **Addition** | Terme | + | Terme | Somme |
| **Soustraction** | Terme | – | Terme | Différence |
| **Multiplication** | Facteur | . | Facteur | Produit |
| **Division** | Dividende | : | Diviseur | Quotient |

### 1.2. Notion de puissance

$$2^7 = \underbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2}_{} = 128$$

Produit de **7** facteurs égaux à 2

$2^7$ → 7 est **l'exposant**

→ 2 est la **base**

128 est appelé la **puissance**.

$2^7$ se lit « 2 exposant 7 » ou « la septième puissance de 2 » ou encore « 2 élevé à la puissance 7 ».

## 2. Particularités des entiers

### 2.1. Représentation sur une droite graduée

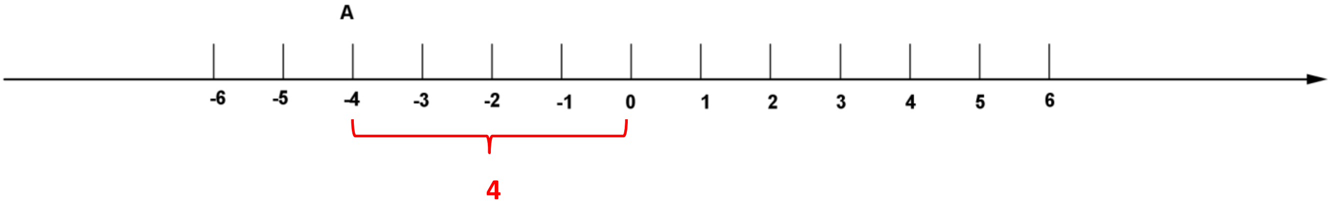
Pour construire une droite graduée, tu dois absolument indiquer l'origine (abs 0) ainsi que l'unité (abs 1) sans oublier la flèche qui indique le sens dans lequel tu vas.


Exemples : abs A = – 5 abs B = 0 abs C = 3

**L'abscisse** d'un point est **le nombre** attribué à ce point sur une **droite graduée**.

## 2.2. Valeur absolue d'un nombre

La **valeur absolue** d'un nombre est la **distance** qui le sépare de 0 sur la droite graduée.




La valeur absolue de – 4 se note |– 4| et vaut 4.

Exemples : |5|= 5 et |– 5|= 5
|0| = 0

La valeur absolue est une distance et est donc **toujours positive**.

## 2.3. Opposé d'un nombre

Deux nombres **opposés** sont deux nombres qui ont la même valeur absolue, mais sont de **signes contraires**.

Exemple : 5 et – 5 sont deux nombres opposés.

0 est son **propre opposé**.

## 2.4. Comparaison de nombres entiers négatifs

Pour comparer deux nombres négatifs, il faut :
- ✓ déterminer la valeur absolue de chacun,
- ✓ établir la comparaison des deux valeurs absolues.

Le plus petit entier est celui possédant la plus grande valeur absolue.

Exemple : Soit à comparer – 12 et – 13.
|– 12| = 12
|– 13| = 13
13 est la plus grande valeur absolue et donc – 13 est le plus petit entier : – 13 < –12.

### 2.5. Convention d'écriture

Dans le calcul avec des nombres entiers, tu dois respecter la règle suivante :
Deux **signes consécutifs** ou symboles d'opération doivent être **séparés** par une parenthèse.
Exemples : On écrira – (– 5), 2 . (– 5)

## 3. Les quatre opérations

### 3.1. L'addition d'entiers

Pour additionner deux nombres entiers de **même signe** :
- ✓ on **additionne** les valeurs absolues des deux nombres ;
- ✓ on donne au résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemple : – 5 + (– 3) = – 8 car |– 5|+ |– 3|= 5 + 3
= 8

Pour additionner deux nombres entiers de **signes contraires** :
- ✓ on **soustrait** la plus petite valeur absolue de la plus grande ;
- ✓ on donne au résultat le signe du nombre qui a la plus grande valeur absolue.

Exemples : – 8 + 6 = – 2 car |– 8| > |6|
8 – 6 = 2

– 10 + 12 = + 2 car |+ 12|>|– 10|
12 – 10 = 2

### 3.2. La soustraction d'entiers

Pour **soustraire** deux nombres entiers, on additionne le premier entier avec l'opposé du deuxième.

Exemples : 6 – (– 2) = 6 + 2
= 8

– 5 – (– 4) = – 5 + 4
= – 1

Il existe des règles de simplification d'écriture pour l'addition et la soustraction d'entiers.

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | + | 2 + (+ 4) = 2 + 4<br>= 6 |
| – | + | – | 2 – (+ 4) = 2 – 4<br>= – 2 |
| + | – | – | 2 + (– 4) = 2 – 4<br>= – 2 |
| – | – | + | 2 – (– 4) = 2 + 4<br>= 6 |

## 3.3. La multiplication d'entiers

### 3.3.1. Le signe du produit

Le produit de plusieurs nombres entiers est de signe :

- **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair**,

Exemple : – 2 . (– 8) . 4 . (– 3) = – 48

- **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**.

Exemple : – 5 . 2 . 4 . (– 6) = 240

### 3.3.2. La multiplication

Pour multiplier deux nombres entiers :
- ✓ déterminer le signe du produit,
- ✓ multiplier les valeurs absolues.

Exemple : Le produit est négatif car il comporte 3 facteurs négatifs.
$|-3| . |2| . |-6| . |-5| = 180$

## 3.4. La division d'entiers

### 3.4.1. Le signe du quotient

Le signe du quotient d'un entier par un entier non nul est :

- **négatif** si les deux entiers sont de signes **contraires**,

Exemple : 42 : (– 7) = – 6

- **positif** si les deux entiers sont de **même signe**.

Exemple : (– 49) : (– 7) = 7

### 3.4.2. La division

Pour diviser un entier par un entier non nul,
- ✓ on divise la valeur absolue du dividende par celle du diviseur,
- ✓ on détermine le signe du quotient.

Exemple : 8 : (– 2) = – 4 $|8| : |-2| = 4$

Le diviseur ne peut en aucun cas valoir 0 !

## 4. Propriétés des opérations

| Propriétés | Addition | Multiplication |
|---|---|---|
| **Commutativité**<br>On peut changer l'ordre des termes / facteurs sans changer le résultat. | $4 + 2 = 2 + 4$<br><br>$5 + (-3) = -3 + 5$ | $2 . 5 = 5 . 2$<br><br>$(-5) . 3 = 3 . (-5)$ |
| **Associativité**<br>Pour calculer la somme / le produit de 3, 4, … entiers, on les groupe par deux pour utiliser les procédés précédents. | $3 + 2 + 4 = (3 + 2) + 4$<br>$= 3 + (2 + 4)$<br><br>$6 + (-5) + 7 = [6 + (-5)] + 7$<br>$= 6 + [(-5) + 7]$ | $5 . (7 . 6) = (5 . 7) . 6$<br>$= 5 . 7 . 6$<br><br>$-3 . (4 . 2) = (-3 . 4) . 2$<br>$= -3 . 4 . 2$ |
| **Élément neutre**<br>Cet élément n'affecte pas la valeur de la somme / du produit. | $0 + 5 = 5$<br>$= 5 + 0$<br><br>$0 + (-3) = -3$<br>$= -3 + 0$<br>Dans l'addition, le **0** est neutre. | $8 . 1 = 8$<br>$= 1 . 8$<br><br>$(-4) . 1 = -4$<br>$= 1 . (-4)$<br>Dans la multiplication, le **1** est neutre. |
| **Élément absorbant**<br>Cet élément l'emporte sur tous les autres. | Pas d'élément absorbant | $0 . 4 = 0$<br>$= 4 . 0$<br>Dans la multiplication, le **0** est absorbant. |
| **Chaque entier est symétrisable pour l'addition.**<br>La somme d'un nombre et de son opposé est nulle. | $3 + (-3) = 0$<br>$= -3 + 3$ | Le symétrique d'un entier pour la multiplication n'est pas un entier. |

## 5. Distributivité et mise en évidence

### 5.1. La distributivité simple

Exemples : $47 . (100 + 1) = 47 . 100 + 47 . 1$

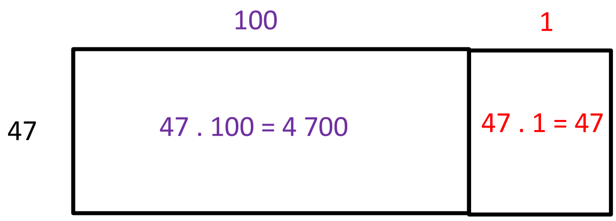
$= 4700 + 47$

$= 4\,747$

$69 . (1\,000 - 1) = 69 . 1\,000 - 69 . 1$

$= 69\,000 - 69$

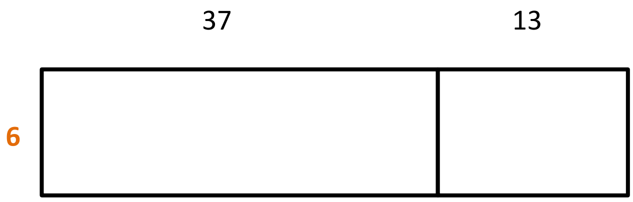
$= 68\,931$




Pour **multiplier** une **somme** / une **différence** par un **naturel**, il faut :
- ✓ **multiplier** chaque **terme** de la somme / différence par ce **naturel** ;
- ✓ **additionner** / **soustraire** les résultats obtenus.

### 5.2. La mise en évidence

Exemple : **6** . 37 + **6** . 13 = **6** . (37 + 13)
= 6 . 50
= 300




Lorsque **tous** les **termes** d'une **somme** / **différence** possèdent un (des) **facteur**(s) **commun**(s), on peut transformer cette somme / différence en un **produit** de **facteurs** en mettant ce(s) facteurs commun(s) **en évidence**.

## 6. Priorités des opérations

Dans chaque calcul, les opérations doivent se faire dans l'ordre suivant :

| | |
|---|---|
| | 3 . (5 – 9 : 3) + (– 3)² – 4 |
| 1) **P**arenthèses | = 3 . 2 + (– 3)² – 4 |
| 2) **E**xposants | = 3 . 2 + 9 – 4 |
| 3) **M**ultiplications / **D**ivisions | = 6 + 9 – 4 |
| 4) **A**dditions / **S**oustractions | = 11 |

Petit moyen mnémotechnique : **PEMDAS**.

À l'intérieur des **parenthèses**, on applique l'ordre **PEMDAS** aux différentes opérations.

Exemple : (5 + 2 : 2) . 3 = (5 + **1**) . 3
= 6 . 3
= 18

Dans le cas de **plusieurs** additions / soustractions ou multiplications / divisions successives, on les exécute dans **l'ordre** de **lecture**.

Exemple : 2 . 6 : 3 + 5 = **12** : 3 + 5
= 4 + 5
= 9

# Les diviseurs et multiples

## 1. Ensembles des diviseurs et multiples

### 1.1. Vocabulaire

7 est un **diviseur** de 42
7 **divise** 42
42 est un **multiple** de 7
42 est **divisible** par 7

Car 42 = 7 . 6

6 est un **diviseur** de 42
6 **divise** 42
42 est un **multiple** de 6
42 est **divisible** par 6

7 divise 42 se note **7|42**.

### 1.2. Ensemble des diviseurs

L'ensemble des diviseurs de 42 se note **div 42.**

div 42 = {**1**, **2**, **3**, 6, 7, **14**, **21**, **42**}

- Tout nombre naturel admet **1** et **lui-même** comme diviseur.
- 0 ne divise aucun naturel différent de 0.
  Exemple : 12 : 0 n'existe pas !
- Tout naturel qui en divise un autre divise aussi tous les multiples de cet autre.
  Exemple : 3|12 (car 12 : 3 = 4), et 12|48 (car 48 : 12 = 4)
  ➔ 3|48.
- Tout naturel qui en divise deux autres divise aussi leur somme et leur différence.
  Exemple : 4|8 (car 8 : 4 = 2) et 4|42 (car 32 : 4 = 8)
  Donc, (8 + 32) : 4 = 10 et (32 – 8) : 4 = 6.

### 1.3. Ensemble des multiples

L'ensemble des multiples de 42 se note **42 N.**

42 N = {0, 42, 84, 126, 168, 210, 252, ... }

0 est multiple de tous les naturels.

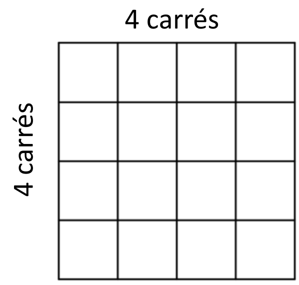
Exemples : 0 . 2 = 0  et 0 . 45 = 0

## 2. Les nombres particuliers

### 2.1. Les nombres carrés

Un nombre **carré** est un nombre naturel qui possède un nombre **impair** de **diviseurs**.

Exemple : 16 est un nombre carré car div 16 = $\overbrace{\{1, 2, 4, 8, 16\}}^{5}$




Un nombre carré peut s'écrire sous la forme d'un produit de **deux** facteurs **égaux**.

Exemple : 16 = $4^2$

### 2.2. Les nombres rectangles

Un nombre **rectangle** est un nombre naturel qui possède un nombre **pair** de **diviseurs**.

Exemple : 24 est un nombre rectangle car div 24 = $\underbrace{\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}}_{8}$

### 2.3. Les nombres premiers

Un nombre **premier** est un nombre naturel qui n'admet exactement que **deux diviseurs distincts** : 1 et lui-même.

Exemple : 7 est un nombre premier car div. 7 = $\{1, 7\}$

**1** n'est **pas** un nombre premier car il n'admet qu'un **seul** diviseur !

### 2.4. Les nombres premiers entre eux

Deux nombres **premiers entre eux** sont deux nombres qui n'admettent que **1** comme **diviseur commun**.

Exemple : 4 et 15 sont premiers entre eux car div 4 = {1, 2, 4} div 15 = {1, 3, 5, 15}

seul diviseur commun = 1

Contre – exemple : 6 et 9 ne sont pas premiers entre – eux car div 6 = {**1**, 2, **3**, 6}
div 9 = {**1**, **3**, 9}. **Il y a deux diviseurs communs !**

Tout naturel divisible par deux naturels premiers entre eux est divisible par leur produit.

Exemple : 4|740 et 5|740
Or, 4 et 5 sont premiers entre eux.
Donc, 740 est divisible par 4 . 5 = 20

## 3. Les caractères de divisibilité

### 3.1. Caractères utilisant le dernier chiffre

- Un nombre est **divisible** par **2** si le dernier chiffre est **pair**.
  Exemples : 10**4**, 20**0**, 12**6**, 4 93**8**
- Un nombre est **divisible** par **5** si le dernier chiffre est **0** ou **5**.
  Exemples : 30**5**, 2**0**, 1**0**
- Un nombre est **divisible** par **10** si le dernier chiffre est **0**.
  Exemples : 3 02**0**, 12**0**, 4**0**

### 3.2. Caractères utilisant les deux derniers chiffres

- Un nombre est **divisible** par **4** si les deux derniers chiffres forment un **multiple de 4**.
  Exemples : 1**16**, 2 0**48**, 3**28**
- Un nombre est **divisible** par **25** si les deux derniers chiffres forment un **multiple de 25**.
  Exemples : 1**75**, 2 0**00**, **50**
- Un nombre est **divisible** par **100** si les deux derniers chiffres sont **00**.
  Exemples : 4 0**00**, 5**00**, 3 3**00**

### 3.3. Caractères utilisant les trois derniers chiffres

- Un nombre est **divisible** par **8** si les trois derniers chiffres forment un **multiple de 8**.
  Exemples : 17 **240**, 7 **848**, **656**
- Un nombre est **divisible** par **125** si les trois derniers chiffres forment un **multiple de 125**.
  Exemples : 13 **250**, 9 **875**, **375**
- Un nombre est **divisible** par **1000** si les deux derniers chiffres sont **000**.
  Exemples : 176 **000**, 5 **000**, 3 **000**

### 3.4. Caractères utilisant les somme des chiffres

- Un nombre est **divisible** par **3** si la somme des chiffres est un **multiple de 3**.
  Exemple : 2 373 est divisible par 3 car 2 + 3 + 7 + 3 = **15**.
- Un nombre est **divisible** par **9** si la somme des chiffres est un **multiple de 9**.
  Exemple : 6 642 est divisible par 9 car 6 + 6 + 4 + 2 = **18**.
- Un nombre est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est un **multiple de 11.**
  Exemple : **919 380** est divisible par 11 car **9 + 9 + 8 = 26** et **1 + 3 + 0 = 4**
  **26** – **4** = **22**.

Pour justifier qu'un nombre est divisible par un autre, tu peux utiliser plusieurs méthodes.

Exemples :

312 est divisible par 3 car 312 = 300 + 12 et que 300 et 12 sont divisibles par 3.

796 est divisible par 4 car 796 = 800 – 4 et que 800 et 4 sont divisibles par 4.

## 4. La division euclidienne

### 4.1. Définition

Effectuer la division euclidienne du naturel D par le naturel non nul d, c'est déterminer l'unique naturel q et l'unique naturel r tels que,

Dividende ⟵ **D = d . q + r** ⟶ Reste    **et r < d**

Diviseur ⟵ d    q ⟶ Quotient

Si **r = 0**, alors D est **divisible** par d et la division est dite **exacte**.

Exemple : 60 = 5 . 12 + 0 ➔ 60 = 5 . 12
Ce qui signifie que 60 est divisible par 5.

### 4.2. Encadrer un quotient à l'unité près

Encadrer un quotient (a : b) à l'unité près, c'est déterminer les deux naturels consécutifs entre lesquels le quotient est compris.

Pour **encadrer** un quotient (**a : b**) à l'unité près :
- ✓ on écrit la **division euclidienne** correspondante,
- ✓ on encadre a : b par q et q + 1.

Exemple : Soit à encadrer $\frac{62}{5}$.

- ✓ 62 = 5 . 12 + 2
- ✓ 12 < 62 : 5 < 13

12 est appelée la valeur approchée par **défaut**.
13 est appelée la valeur approchée par **excès**.

## 5. PGCD et PPCM

### 5.1. La décomposition en facteurs premiers

Pour **décomposer** un nombre en facteurs premiers, il faut diviser successivement ce nombre par les **diviseurs premiers** par ordre **croissant**.

Exemple : Soit à décomposer 126.

| | |
|---|---|
| 126 | 2 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

Facteurs premiers

La décomposition de 126 est $2 \,.\, 3^2 \,.\, 7$

### 5.2. Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

#### 5.2.1. Par la comparaison des ensembles de diviseurs

Pour **déterminer** le **PGCD** de deux nombres :
- ✓ on établit **l'ensemble des diviseurs** de chacun des deux nombres,
- ✓ on **souligne** tous les diviseurs communs,
- ✓ on prend le plus **grand diviseur commun** aux deux ensembles.

Exemple : Soit à déterminer le PGCD de 48 et 60.
- ✓ div 48 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, **12**, 16, 24, 48}
  div 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, **12**, 15, 20, 30, 60}
- ✓ PGCD (48, 60) = **12**

### 5.2.2. Par la décomposition en facteurs premiers

Pour **déterminer** le **PGCD** de deux nombres :
- ✓ on **décompose** les deux nombres en facteurs premiers,
- ✓ on **souligne** tous les facteurs communs,
- ✓ on calcule le **produit** des facteurs premiers **communs** affectés de leur plus **petit exposant**.

Exemple : Soit à déterminer le PGCD de 48 et 60.
- ✓ $48 = 2^4 . 3$
  $60 = 2^2 . 3 . 5$
- ✓ PGCD (48, 72) = $2^2 . 3 = 12$

- ❖ Tout nombre naturel qui en divise un autre est le PGCD de ces deux nombres.
  Exemple : 16 divise 80 car 80 = 16 . 5 et PGCD (16,80) = 16
- ❖ Deux nombres premiers entre eux ont leur PGCD égal à 1.
  Exemple : 8 et 9 sont premiers entre eux et PGCD (8,9) = 1

## 5.3. Le Plus Petit Commun Multiple

### 5.3.1. Par la comparaison des ensembles de diviseurs

Pour **déterminer** le **PPCM** de deux nombres :
- ✓ on établit **l'ensemble des multiples** de chacun des deux nombres,
- ✓ on **souligne** tous les multiples communs,
- ✓ on prend le plus **petit multiple commun non nul** aux deux ensembles.

Exemple : Soit à déterminer le PPCM de 36 et 42.
- ✓ $36\,\mathbb{N} = \{0, 36, 72, 108, 144, 180, 216, \mathbf{252}, 288\}$
  $42\,\mathbb{N} = \{0, 42, 84, 126, 168, 210, \mathbf{252}, 294\}$
- ✓ PPCM (36, 42) = **252**

### 5.3.2. Par la décomposition en facteurs premiers

Pour **déterminer** le **PPCM** de deux nombres :
- ✓ on **décompose** les deux nombres en facteurs premiers,
- ✓ on calcule le **produit** des facteurs premiers, **communs ou non**, affectés de leur plus **grand exposant**.

Exemple : Soit à déterminer le PPCM de 36 et 42.
- ✓ $36 = 2^2 . 3^2$
  $42 = 2 . 3 . 7$
- ✓ PGCD (48, 72) = $2^2 . 3^2 . 7 = 252$

- Tout nombre naturel qui est multiple d'un autre est le PPCM de ces deux nombres.
  Exemple : **48** est multiple de 12 car 48 = 12 . 4 et PPCM (12,48) = **48**
- Deux nombres premiers entre eux ont leur PPCM égal à leur produit.
  Exemple : 5 et 9 sont premiers entre eux et PPCM (5,9) = 5 . 9 = 45

Tu peux également utiliser la disposition pratique qui permet de déterminer à la fois le PGCD et le PPCM de deux nombres.

Exemple : Soit à déterminer le PGCD et PPCM de 378 et 630.

| | | |
|---|---|---|
| 630 | 378 | 2 |
| 315 | 189 | 3 |
| 105 | 63 | 3 |
| 35 | 21 | 7 |
| 5 | 3 | |

PGCD (378, 630) = $\mathbf{2 . 3^2 . 7}$
= 126

PPCM (378, 630) = $\mathbf{2 . 3^3 . 5 . 7}$
= 1890

Pour cette décomposition, on utilise uniquement les facteurs premiers communs aux deux nombres.

# Les nombres rationnels

## 1. Vocabulaire

Une fraction est un nombre qui représente le **quotient** d'un **entier** par un **entier non nul**.

Exemple : Soit la fraction

$$\frac{-8}{11}$$

Numérateur

Dénominateur

**– 8** et **11** sont appelés les **termes** de la fraction.

## 2. Le signe d'une fraction

Une fraction est **positive** si ses deux termes sont de **même signe**.

Exemple : $\frac{3}{8}$ et $\frac{-7}{-9}$

Une fraction est **négative** si ses deux termes sont de **signes différents**.

Exemple : $\frac{-9}{5}$ et $\frac{2}{-11}$

Il est interdit de laisser un signe « – » au **dénominateur** d'une fraction.

Exemples : La fraction $\frac{2}{-11}$ s'écrira donc $\frac{-2}{11}$ ou $-\frac{2}{11}$.

La fraction $\frac{-7}{-9}$ s'écrira donc $\frac{7}{9}$.

## 3. Les fractions particulières

### 3.1. La fraction unité

La fraction vaut **1** lorsque le **numérateur** est **égal** au **dénominateur.**

Exemples : $\frac{8}{8} = \frac{126}{126} = \frac{-2}{-2} = 1$

### 3.2. La fraction nulle

La fraction est **nulle** lorsque le **numérateur** est égal à **0**.

Exemples : $\frac{0}{7} = \frac{0}{12} = \frac{0}{-2} = 0$

Lorsque le **dénominateur** est égal à **0** la fraction **n'existe pas** !

Exemples : $\frac{8}{0} = \frac{97}{0} = \frac{-3}{0} = /$

### 3.3. L'opposé d'une fraction

Deux **fractions opposées** sont deux fractions qui possèdent le **même dénominateur** et des **numérateurs opposés**.

Exemples : $\frac{7}{8}$ et $\frac{-7}{8}$ sont deux fractions opposées.

La **somme** de deux **fractions opposées** vaut **0**.

### 3.4. L'inverse d'une fraction

**L'inverse** d'une **fraction** est la fraction dont le **numérateur** et le **dénominateur** ont été **inversés**.

Exemples : $\frac{7}{8}$ et $\frac{8}{7}$ sont deux fractions inverses. L'inverse de $\frac{7}{8}$ se note $(\frac{7}{8})^{-1}$

Le **produit** d'une fraction par sa fraction inverse vaut **1**.

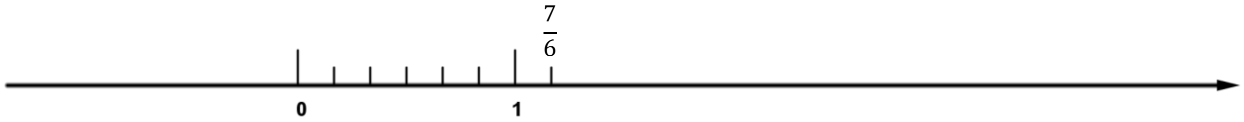
## 4. Placement sur une droite graduée

Toute fraction correspond à l'abscisse d'un point d'une droite graduée.

Pour **placer** une fraction sur une droite graduée :
- ✓ on **divise** l'intervalle de 0 à 1 en autant de **parties égales** que le **dénominateur** l'indique ;
- ✓ on place la fraction après le nombre d'intervalles indiqué par le **numérateur**.

Exemple : Soit à placer la fraction $\frac{7}{6}$.

L'intervalle de 0 à 1 est divisée en **6** parties égales. La fraction est placée à l'extrémité du **7**$^{e}$ intervalle.




## 5. Les fractions et les nombres décimaux

Chaque fraction à termes entiers peut s'écrire sous la forme d'un nombre entier, un nombre décimal limité ou un nombre décimal illimité.

Pour passer de l'écriture **fractionnaire** à l'écriture **décimale**, il suffit d'effectuer la **division** du numérateur par le dénominateur.

Exemples : $\frac{7}{20} = 7 : 20 = 0,35$ $\qquad \frac{-15}{6} = (-15) : 6 = -2,5$ $\qquad \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333\ 333 \ldots$

Pour t'aider, certaines fractions peuvent être transformées en **fractions décimales**.

### 5.1. La fraction décimale

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemples : $\frac{7}{\mathbf{10}}$, $\frac{737}{\mathbf{1000}}$ et $\frac{-48}{\mathbf{100}}$ sont des fractions décimales.

Les fractions avec **100** comme **dénominateur** peuvent s'écrire sous la forme de **pourcentages**.

Exemples : $\frac{37}{\mathbf{100}} = 37\ \%$

## 5.2. Transformation de la fraction en fraction décimale

Pour **transformer** une fraction en fraction **décimale** :

- ✓ on **détermine** le nombre qui multiplie / divise le **dénominateur** de la fraction pour donner une puissance de 10 ;
- ✓ on **multiplie / divise** le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce nombre.

Exemples :

$$\frac{67}{25} \overset{.\,4}{\underset{.\,4}{=}} \frac{268}{100} \qquad\qquad \frac{39}{150} \overset{:\,3}{\underset{:\,3}{=}} \frac{13}{50} \overset{.\,2}{\underset{.\,2}{=}} \frac{26}{100}$$

Cette méthode ne fonctionne que pour les fractions dont le dénominateur n'est qu'un multiple de 2 et/ou 5 !

## 5.3. Transformation de la fraction décimale en nombre décimal

Pour **transformer** une fraction **décimale** en nombre décimal :

- ✓ on **compte** le nombre de **0** au dénominateur de la fraction.
- ✓ on **recopie** le **numérateur** de la fraction.
- ✓ on **déplace** la virgule vers la **gauche** d'autant de rang qu'il y a de 0.

Exemple : Soit la fraction $\frac{268}{100}$ à transformer en nombre décimal.

- ✓ Dans 1**00** il y a **2 zéros**.
- ✓ On recopie 268.
- ✓ On déplace la virgule de **2** rangs vers la gauche. Ce qui donne 2,68.

## 5.4. Transformation du nombre décimal en fraction décimale

Pour **transformer** un nombre décimal en fraction décimale :

- ✓ on **compte** le nombre de **chiffres** situés après la **virgule**.
- ✓ on **recopie** le nombre décimal **sans la virgule** comme **numérateur.**
- ✓ on **place** au **dénominateur** une puissance de 10 qui a pour exposant le nombre de chiffre après la virgule.

Exemple : Soit le nombre 0,54 à transformer en fraction décimale.

- ✓ Dans 0,**54** il y a **2 chiffres** après la virgule.
- ✓ On recopie 0,54 sans la virgule. Ce qui donne 54.
- ✓ On place au dénominateur $10^2$. Ce qui donne $\frac{54}{100}$.

**Voici un tableau qui reprend les valeurs décimales de plusieurs fractions particulières.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2} = 0{,}5$ | $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots 3$ | $\frac{1}{4} = 0{,}25$ | $\frac{1}{5} = 0{,}2$ |
| $\frac{1}{8} = 0{,}125$ | $\frac{1}{10} = 0{,}1$ | $\frac{1}{20} = 0{,}05$ | $\frac{1}{25} = 0{,}04$ |
| $\frac{1}{50} = 0{,}02$ | $\frac{1}{100} = 0{,}01$ | $\frac{1}{125} = 0{,}008$ | $\frac{1}{1000} = 0{,}001$ |

## 6. Encadrement de fraction

Encadrer une fraction à l'unité près, c'est déterminer les deux entiers consécutifs entre lesquels la fraction est comprise.

Pour **encadrer** une fraction à l'unité près :
- ✓ on prend la **valeur absolue** de la fraction ;
- ✓ on écrit la **division euclidienne** correspondante ;
- ✓ on place la fraction qui est comprise entre q et q + 1.

Si la fraction est négative, on applique la propriété suivante :

$$\text{Si, } x < \frac{a}{b} < y \text{, alors } -y < \frac{-a}{b} < -x.$$

Exemples : Soit à encadrer $\frac{84}{5}$.

- ✓ $\left|\frac{84}{5}\right| = \frac{84}{5}$
- ✓ $84 = 5 \cdot \mathbf{16} + 4$
- ✓ $\mathbf{16} < \frac{84}{5} < 13$

Soit à encadrer $\frac{-62}{5}$.

- ✓ $\left|\frac{-62}{5}\right| = \frac{62}{5}$
- ✓ $62 = 5 \cdot \mathbf{12} + 2$
- ✓ Si $\mathbf{12} < \frac{62}{5} < 13$, alors $-13 < \frac{-62}{5} < -12$

## 6.1. Les valeurs approchées d'une fraction positive

Pour calculer les **valeurs approchées** d'une fraction **positive** à un rang donné :
- ✓ on **calcule** le **quotient** en effectuant la division ;
- ✓ on **supprime** les chiffres à **droite** de celui qui correspond au rang demandé ;
- ✓ on prend le **nombre** restant comme valeur approchée par **défaut** ;
- ✓ on **ajoute 1** au dernier rang de la valeur approchée par **défaut** pour obtenir la valeur approchée par **excès**.

Exemple : Soit à calculer les valeurs approchées au **dixième** près de la fraction $\frac{16}{11}$ .

- ✓ $\frac{16}{11}$ = 1,454545…
- ✓ On supprime les chiffres droites de celui du rang de dixièmes et ça donne 1,4.
- ✓ Valeur approchée par défaut au dixième près = 1,4
- ✓ Valeur approchée par excès au dixième près = 1,4 + **0,1** = 1,5

Au dixième près, $1{,}4 < \frac{16}{11} < 1{,}5$

## 6.2. Les valeurs approchées d'une fraction négative

Pour calculer les **valeurs approchées** d'une fraction **négative** à un rang donné :
- ✓ on calcule les valeurs approchées de la valeur absolue de la fraction ;
- ✓ on applique la propriété suivante :

Si, $x < \frac{a}{b} < y$, alors $-y < \frac{-a}{b} < -x$.

Exemple : Soit à calculer les valeurs approchées au **dixième** près de la fraction $\frac{-16}{11}$ .

- ✓ on calcule les valeurs approchées de $\left|\frac{-16}{11}\right| = \frac{16}{11}$

  Valeur approchée par défaut au dixième près = 1,4

  Valeur approchée par excès au dixième près = 1,4 + **0,1** = 1,5
- ✓ si $1{,}4 < \frac{16}{11} < 1{,}5$, alors $-1{,}5 < \frac{-16}{11} < -1{,}4$

Au dixième près, $-1{,}5 < \frac{-16}{11} < -1{,}4$

# 7. La fraction d'un nombre

Pour **calculer** la fraction d'un nombre :
- ✓ on **divise** le nombre par le **dénominateur** de la fraction ;
- ✓ on **multiplie** ce résultat par le **numérateur** de la fraction.

Exemple : Soit à calculer $\frac{3}{5}$ de 300.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, ": 5"'] & 300 \arrow[d, ": 5"] \\
\frac{1}{5} \arrow[r] \arrow[d, ". 3"'] & 60 \arrow[d, ". 3"] \\
\frac{3}{5} \arrow[r] & 180
\end{tikzcd}$$

# 8. La simplification de fractions

Pour **simplifier** une fraction, il suffit de **diviser** le **numérateur** et le **dénominateur** par le **même** nombre.

Exemple :

: 11

$$\frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

: 11

Une **fraction irréductible** est une fraction simplifiée au maximum.

## 8.1. La méthode du PGCD

Pour rendre une fraction **irréductible** :
- ✓ on **détermine le PGCD** du numérateur et du dénominateur de la fraction ;
- ✓ on **divise** les **termes** de la fraction par leur **PGCD**.

Exemple : Soit $\frac{144}{108}$ à rendre irréductible.

- ✓ PGCD (108, 144) = **36**
- ✓ : **36**

  $$\frac{144}{108} = \frac{4}{3}$$

  : **36**

### 8.2. Les fractions équivalentes

Pour obtenir une fraction **équivalente** à une fraction donnée, il faut **multiplier** / **diviser** les deux **termes** de la fraction de départ par le **même** nombre non-nul.

Exemple :

. 2 . 3 : 2

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12}$$

. 2 . 3 : 2

## 9. Comparaison de fractions à termes naturels

### 9.1. Les fractions de même numérateur

Pour **comparer** deux fractions de **même numérateur**, il faut regarder les dénominateurs.
La **fraction** la plus **petite** est celle qui possède le plus **grand dénominateur**.

Exemples : Soit à comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{7}$.

7 > 4 donc $\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$.

### 9.2. Les fractions de même dénominateur

Pour **comparer** deux fractions de **même dénominateur**, il faut regarder les numérateurs.
La **fraction** la plus **petite** est celle qui possède le plus **petit numérateur**.

Exemple : Soit à comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{9}{4}$.

7 < 9 donc $\frac{7}{4} < \frac{9}{4}$.

## 9.3. Les fractions de numérateurs et dénominateurs différents

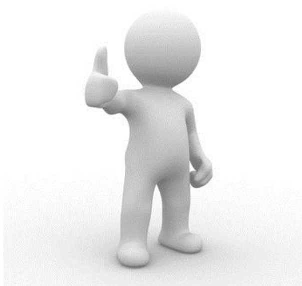
Pour **comparer** deux fractions de **numérateurs et dénominateurs différents** :

- ✓ on **réduit** les fractions au **même dénominateur** ;
  - on détermine le **PPCM** des deux **dénominateurs** ;
  - on écrit les fractions **équivalentes** possédant le PPCM comme dénominateur ;
- ✓ on applique la **règle** de **comparaison** de deux fractions avec le même **dénominateur**.

Exemple : Soit à comparer $\frac{5}{3}$ et $\frac{9}{8}$.

PPCM (3, 8) = 24

$$\frac{5}{3} \underset{\cdot 8}{\overset{\cdot 8}{=}} \frac{40}{24} \quad \text{et} \quad \frac{9}{8} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}} \frac{27}{24}$$



On compare $\frac{40}{24}$ et $\frac{27}{24}$.

27 < 40 donc $\frac{27}{24} < \frac{40}{24}$ et donc $\frac{9}{8} < \frac{5}{3}$

# 10. Comparaison de fractions à termes entiers

Pour **comparer** deux fractions à **termes entiers** :

- ✓ on **réduit** les fractions au **même dénominateur positif** ;
- ✓ la **fraction** la plus **petite** est celle qui possède le plus **petit numérateur**.

Exemples :

- Soit à comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$.
  - $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$
  - $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$
- Soit à comparer $\frac{-3}{4}$ et $\frac{2}{3}$.
  - $\frac{-3}{4} = \frac{-9}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$
  - $\frac{-9}{12} < \frac{8}{12}$
- Soit à comparer $\frac{-3}{4}$ et $\frac{-2}{3}$.
  - $\frac{-3}{4} = \frac{-9}{12}$ et $\frac{-2}{3} = \frac{-8}{12}$
  - $\frac{-9}{12} < \frac{-8}{12}$

## 11. L’addition / soustraction de fractions

Pour **additionner / soustraire** deux fractions :

- ✓ on **simplifie** les fractions données ;
- ✓ on **réduit** au même dénominateur les deux fractions ;
- ✓ on additionne / soustrait les numérateurs et on **recopie** le dénominateur commun ;
- ✓ on **simplifie** la fraction obtenue.

Exemple : Soit $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{14}$ à additionner :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{14} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \qquad \text{car } \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

$$= \frac{7}{21} + \frac{3}{21} \qquad \text{car PPCM } (3, 7) = 21 \quad \frac{1}{7} = \frac{3}{21} \text{ et } \frac{1}{3} = \frac{7}{21}$$

$$= \frac{7+3}{21}$$

$$= \frac{10}{21}$$

## 12. La multiplication de fractions

Pour **multiplier** deux fractions :

- ✓ on **simplifie** les fractions données ;
- ✓ on multiplie les **numérateurs** entre eux et les **dénominateurs** entre eux **;**
- ✓ on **simplifie** la fraction obtenue.

Exemple : Soit $\frac{1}{5}$ et $\frac{12}{16}$ à multiplier :

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{12}{16} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \qquad \text{car } \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5}$$

$$= \frac{3}{20}$$

## 13. La division de fractions

Pour **diviser** deux fractions :

- ✓ on **simplifie** les fractions données ;
- ✓ on **multiplie** la première fraction par **l’inverse** de la seconde **;**
- ✓ on **simplifie** la fraction obtenue.

Exemple : Soit $\frac{1}{5}$ et $\frac{9}{15}$ à diviser :

$$\frac{1}{5} : \frac{9}{15} = \frac{1}{5} : \frac{3}{5} \qquad \text{car } \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{5}^{1}}{{}_{1}\cancel{5} \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

# Les puissances

## 1. Définitions

### 1.1. Puissance d'un naturel

Soit n et a des naturels non nuls, la **n$^e$ puissance du naturel a** est le produit de **n** facteurs égaux à

Exemple : $5^2 = 5 . 5$

### 1.2. Puissance d'un entier

Soit n un naturel non nul et a un entier non nul, **la n$^e$ puissance du nombre a** est le produit de **n** facteurs égaux à **a**.

Exemple : $(-4)^3 = (-4) . (-4) . (-4)$

## 2. Vocabulaire de puissances particulières

$2^3$ se lit 2 au **cube**.

$4^2$ se lit 4 au **carré**.

## 3. Puissances particulières

- Tout nombre entier non nul élevé à la puissance 0 donne 1 comme résultat.
  Exemples : $3^0 = \mathbf{1}$ $(-4)^0 = \mathbf{1}$
- Tout nombre entier élevé à la puissance 1 donne lui-même comme résultat.
  Exemples : $3^1 = \mathbf{3}$ $(-4)^1 = \mathbf{-4}$
- 0 élevé à la puissance 0 donne un résultat impossible.
  Exemple : $0^0 =$ /

## 4. La règle des signes d'une puissance

- ✓ Toute puissance d'un entier positif est positive.
- ✓ Toute puissance d'un entier négatif est :
  - **positive** si l'exposant est **pair,**
  - **négative** si l'exposant est **impair**.

Exemples : $3^2 = 9$ $(-3)^2 = 9$ $(-3)^3 = -27$

Attention, ne pas confondre $\mathbf{(-3)^2}$ et $\mathbf{-3^2}$ !!
$(-3)^2 = 9$ et $-3^2 = -(3)^2 = -9$

## 5. Les propriétés des puissances

| Règle | Codage | Exemples |
|---|---|---|
| **Produit de puissances de même base**<br>On conserve la base commune et on additionne les exposants. | * $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$ | $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6$<br>$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$ |
| **Quotient de puissances de même base**<br>On conserve la base commune et on soustrait les exposants. | * $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ | $\frac{4^6}{4^2} = 4^{6-2} = 4^4$ $\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$<br>$\frac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$<br>$\frac{b^2}{b^8} = b^{2-8} = b^{-6} = \frac{1}{b^{-6}}$ |
| **Puissance d'une puissance**<br>On conserve la base et on multiplie les exposants. | * $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$ | $((-3)^2)^4 = (-3)^{2 \cdot 4} = (-3)^8$<br>$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ |
| **Puissance d'un produit**<br>On élève chaque facteur à la puissance indiquée et on multiplie les résultats. | * $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ | $(ab)^5 = a^5 \cdot b^5$<br>$(-3a)^3 = (-3)^3 \cdot a^3 = -27a^3$ |
| **Puissance d'un quotient**<br>On élève chaque terme à la puissance indiquée et on effectue le quotient. | * $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ | $\left(\frac{-2}{7}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{7^2}$<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7}$ |

* $\forall a, b \in \mathbb{Z}_0$ et $\forall m, p \in \mathbb{N}_0$.

## 6. Les puissances de 10

Si $n$ est un naturel non nul,

$$10^{n} = \underbrace{10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \ldots 10}_{n \text{ facteurs}} \qquad = 1\underbrace{00\,00 \ldots 00}_{\boldsymbol{n}\ \textbf{zéros derrière le chiffre 1}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^{n}} = \frac{1}{1\underbrace{000\,..0}_{n \text{ zéros}}} \qquad = 0{,}\underbrace{00 \ldots 01}_{\boldsymbol{n}\ \textbf{chiffres derrière la virgule}}$$

Exemples : $10^{6} = 1\,000\,000$ (il y a 6 zéros derrière le 1.)

$10^{-5} = 0{,}00001$ (il y a 5 chiffres derrière la virgule.)

Le signe « – » de l'exposant signifie que le nombre est inférieur à 1 et pas qu'il est négatif.

### 6.1. Multiplier un nombre par $10^{n}$

Pour multiplier un nombre décimal par **$10^{n}$** :
- ✓ on déplace la **virgule** de n rangs vers la **droite,**
- ✓ on **ajoute** des **zéros** si nécessaire pour compléter les rangs.

Exemple : $7{,}85 \,.\, 10^{5} = 78\,500$

### 6.2. Multiplier un nombre par $10^{-n}$

Pour multiplier un nombre décimal par **$10^{-n}$** :
- ✓ on déplace la **virgule** de n rangs vers la **gauche,**
- ✓ on **ajoute** des **zéros** si nécessaire pour compléter les rangs.

Exemple : $913 \,.\, 10^{-5} = 0{,}00913$

## 7. La notation scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme :

$$\mathbf{a \,.\, 10^{b}}$$

dans laquelle **a** $\in$ **N** et **1 < a < 10** et **b** $\in$ $\mathbf{Z_0}$

### 7.1. Convertir un nombre décimal en notation scientifique

Pour convertir un nombre décimal en notation scientifique :
- ✓ on écrit le nombre avec **un chiffre non nul** devant la virugle,
- ✓ on **multiplie** le nombre par la **puissance de 10** correspondante.

Exemples : 149 000 = $1{,}49 \,.\, 10^{5}$ 0,006 = $6 \,.\, 10^{-4}$

### 7.2. Convertir une notation scientifique en nombre décimal

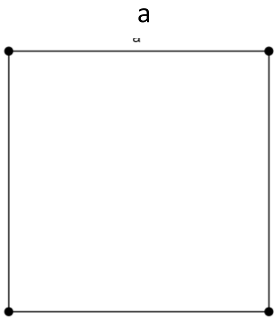
Pour convertir une notation scientifique en nombre décimal :
- ✓ on **multiplie** le nombre par la **puissance de 10** correspondante.

Exemples : $2{,}76 \,.\, 10^{4}$ = 27 600 $9{,}48 \,.\, 10^{-4}$ = 0,000 948

# Le calcul littéral

## 1. Vocabulaire

### 1.1. Une expression littérale




Une expression littérale est une expression mathématique dans laquellle interviennent des **nombres** et des **lettres**. Elle permet de **généraliser un calcul**.

Exemple : L'expression **4a** généralise le calcul du périmètre du carré de côté a.

### 1.2. Les composants d'une expression littérale

Le coefficient ⟵ 12a ⟶ La variable

Les lettres constituent la **partie littérale** de l'expression.

Exemple : Dans l'expression 3x + z, les variables sont x et z.
3 est le coefficient de x ; 1 celui de z.

### 1.3. Les termes semblables

Dans une somme/une différence algébrique les **termes semblables** sont des termes qui ont la **même partie littérale.**

Exemple : Soit 3c – 8c.
3c et – 8c sont des termes semblables.

Contre – exemple : Soit 4a + 5b.
4a + 5b ne sont pas termes semblables.

## 2. Les conventions d'écriture

Dans le calcul littéral, tu dois respecter deux règles :

- on ne note pas le signe « **.** » de la multiplication,
  Exemple : On écrira 4ab plutôt que 4 . a . b
- on écrit les lettres dans **l'ordre alphabétique**.
  Exemple : On écrira – 8abc plutôt que – 9cab

## 3. Le codage et décodage

Chaque **expression littérale** peut se **décoder** en **langage courant** à l'aide du vocabulaire des opérations.

Exemple : $(a - b)^3$ se traduit par « le cube de la différence de a et de b ».

A l'inverse, chaque traduction en **langage courant** peut se **coder** en une **expression littérale**.

Exemple : « Le double du carré de l'opposé de a » se code par $2(-a)^2$.

## 4. La réduction de termes semblables

### 4.1. Définition

**Réduire** une somme, c'est l'écrire avec le **minimum** de **termes**.
**Réduire** un produit, c'est l'écrire avec le **minimum** de **facteurs**.

### 4.2. La réduction d'une somme algébrique

Pour **réduire une somme algébrique** :

- ✓ on **recopie** les **parties littérales** des termes semblables,
- ✓ on **additionne** leurs **coefficients**.

Exemple : $2a + 7b - 3a = (-3 + 2)a + 7b$

$= -a + 7b$

### 4.3. La réduction d'un produit algébrique

Pour **réduire un produit algébrique** :

- ✓ on **multiplie** les **coefficients** entre eux,
- ✓ on **multiplie** les **parties littérales** entre elles.

Exemple : $5b \cdot (-3ab) = 5 \cdot (-3) \cdot b \cdot ab$

$= -15ab^2$

## 5. La valeur numérique d'une expression littérale

La **valeur numérique** d'une expression littérale est le **nombre** obtenu en **remplaçant** les lettres par leurs valeurs données.

Exemple : Si f = 3 et t = – 7, la valeur numérique de l'expression – 5f + 3t vaut – 5 . 3 + 3 . (– 7)
= – 15 + (– 21)
= – 36

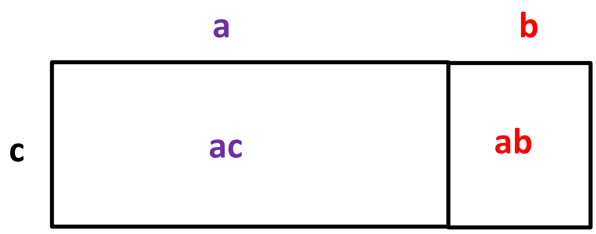
## 6. La distributivité

### 6.1. La distributivité simple

Pour **multiplier** une **somme** / une **différence** par un nombre, il faut :
- ✓ **multiplier** chaque **terme** de la somme / différence par ce **nombre,**
- ✓ **additionner** / **soustraire** les produits obtenus.

Exemples : c . (a + b) = c . a + c . b
= ac + bc

c . (a – b) = c . a – c . b
= ac – bc

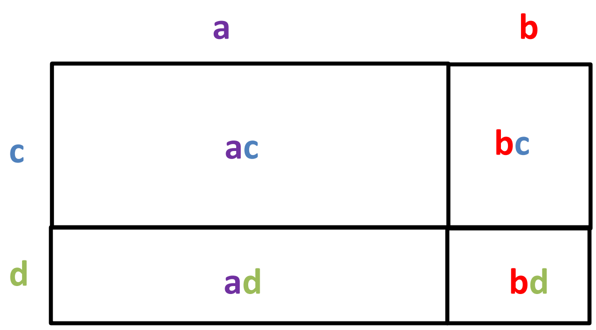



### 6.2. La distributivité double

Pour **multiplier** une **somme** / une **différence** par une somme / différence, il faut :
- ✓ **multiplier** chaque **terme** de la première somme / différence par chaque terme de la seconde**,**
- ✓ **additionner** / **soustraire** les produits obtenus.

Exemples : (a + b) . (c + d) = a . c + a . d + b . c + b . d
= ac + ad + bc + bd

(a – b) . (c + d) = a . c + a . d + (– b) . c + (– b) . d
= ac + ad – bc – bd



### 6.3. La mise en évidence

Lorsque **tous** les **termes** d'une **somme** / **différence** possèdent un (des) **facteur**(s) **commun**(s), on peut transformer cette somme / différence en un **produit** de **facteurs** en mettant ce(s) facteurs commun(s) **en évidence**.

Exemple : $ab + ac = a \,.\, b + a \,.\, c$
$= a\,(b + c)$

a est le **PGCD** des termes ab et ac.


## 7. La suppression des parenthèses

### 7.1. La suppression des parenthèses précédées du signe « + »

Pour **supprimer les parenthèses précédées du signe « + »**, on ne doit **rien changer** aux signes des termes à l'intérieur des parenthèses.

Exemple : $4a + (-\,2b + 3c) = 4a - 2b + 3c$

### 7.2. La suppression des parenthèses précédées du signe « – »

Pour **supprimer les parenthèses précédées du signe « – »**, on doit **changer** les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.

Exemple : $5x - (-\,4y + 2z) = 5x - 1\,(-\,4y + 2z)$

$= 5x + 4y - 2z$

## 8. Les produits remarquables

### 8.1. Le carré d'une somme

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

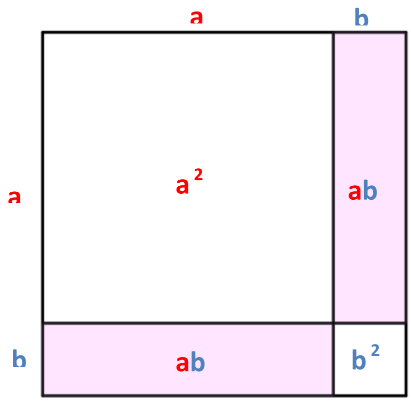
Exemple : $(4x + 2y)^2 = (4x)^2 + 2 \,.\, 4x \,.\, 2y + (2y)^2$

$= 16x^2 + 20xy + 4y^2$

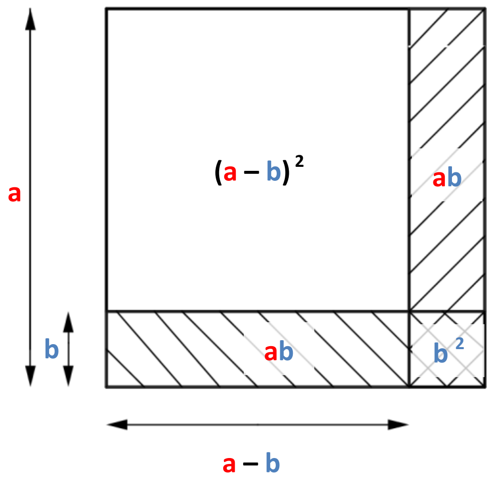
$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$



## 8.2. Le carré d'une différence




$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exemple : $(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2$

$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

## 8.3. Le produit de deux binômes conjugués

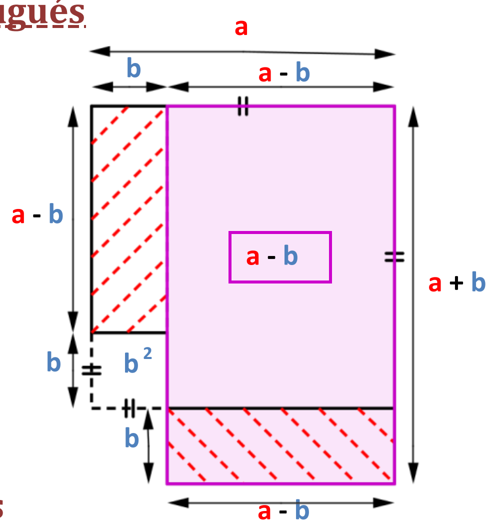
$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemple : $(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 2^2$

$= x^2 - 4$

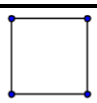
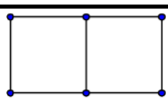
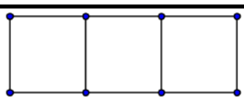
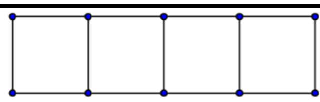
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$




# 9. Dénombrer avec les expressions littérales

En observant une suite de motifs numérotés, on peut construire une expression littérale qui donne le nombre d'objet dans le motif numéro *n*.

| |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
| Numéro | n°1 | n°2 | n°3 | n°4 |
| Nombre de bâtonnets | 4 | 7 | 10 | 13 |

+ 3 + 3 + 3

Déterminons l'expression littérale correspondant à cette suite :
Pour **passer d'un motif à l'autre** le nombre de bâtonnets **augmente** de **3**.

Codage : **3***n*

Le **premier motif** est composé de **4** bâtonnets.

La **division euclidienne** correspondante est $4 = 3 \cdot 1 + 1$

Codage : $3n + 1$

L'expression **3*n* + 1** permet de trouver **le nombre de bâtonnets du n^e^ motif.**

## 9.1. Calculer le nombre d'objets

Pour **calculer le nombre d'objets** d'un motif de numéro donné :
- ✓ on **remplace *n*** par la valeur donnée dans l'expression littérale,
- ✓ on **calcule** la **valeur numérique** de l'expression littérale.

Exemple : Soit à calculer le nombre de bâtonnets du motif numéro 100 avec l'expression $3n + 1$.

- ✓ On remplace $n$ par 100. Ça donne $3 \cdot 100 + 1$
- ✓ On calcule $3 \cdot 100 + 1 = 301$.

  Le motif numéro 100 est composé de **301 bâtonnets**.

## 9.2. Déterminer le numéro du motif

Pour **déterminer le numéro du motif** dont on connaît le nombre d'objets qui le constituent :
- ✓ on **égale l'expression littérale** au nombre d'objets **;**
- ✓ on **calcule** la **valeur** de la **variable** en résolvant **l'équation**.

Exemple : Soit à déterminer le numéro du motif comprenant 91 bâtonnets avec l'expression $3n + 1$.

- ✓ On égale $3n + 1$ à 91. Ça donne $3n + 1 = 91$
- ✓ On résout l'équation $3n + 1 = 91$

$$3n + 1 - 1 = 91 - 1$$
$$\frac{3n}{3} = \frac{90}{3}$$
$$n = 30$$

Le motif qui possède 91 bâtonnets porte le **numéro 30**.

## 9.3. Quelques suites de nombres particuliers

Les suites de certains nombres particuliers permettent d'établir l'expression littérale de ces nombres.

La suite des nombres naturels **pairs** : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, …

L'expression littérale d'un naturel **pair** est **2*n***.
Deux naturels pairs **consécutifs** se codent par **2*n*** et **2*n* + 2** ou **2*n* – 2** et **2*n***.

La suite des nombres naturels **impairs** : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, …

L'expression littérale d'un naturel **impair** est **2*n* + 1**.
Deux naturels **impairs consécutifs** se codent par **2*n* + 1** et **2*n* + 3** ou **2*n* – 1** et **2*n* + 1**.

La suite des nombres naturels **triangulaires** : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 35, 43, 52, 62, 73, …

L'expression littérale d'un naturel triangulaire est $\frac{n.(n+1)}{2}$.

La suite des nombres naturels **carrés** : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, …

L'expression littérale d'un naturel **carré** est $n^2$.

## 10. Les équations à une inconnue

### 10.1. Définition

Une **équation** à une inconnue est une **égalité** entre deux membres comprenant des nombres et une **lettre** appelée **l'inconnue**.

Exemple : $3x + 12 = 18$ est une équation dont $x$ est l'inconnue.

### 10.2. Les propriétés des égalités

- Si on **ajoute** un **même nombre** aux **deux** membres d'une égalité, on **conserve** l'égalité.

  Exemple : $2x - 5 = 7$

  $(2x - 5) + 5 = (7) + 5$

  $2x = 12$

- Si on **enlève** un **même nombre** aux **deux** membres d'une égalité, on **conserve** l'égalité.

  Exemple : $3x + 7 = 22$

  $(3x + 7) - 7 = (22) - 7$

  $3x = 15$

- Si on **multiplie** par un **même nombre** les **deux** membres d'une égalité, on **conserve** l'égalité.

  Exemple : $\frac{5x}{4} = 15 - 5$

  $(\frac{5x}{4}) . 4 = (15 - 5) . 4$

  $5x = 40$

- Si on **divise** par un **même nombre non nul** les **deux** membres d'une égalité, on **conserve** l'égalité.

  Exemple : $-3x + 3 = 21$

  $(-3x + 3) : (-3) = (21) : (-3)$

  $x - 1 = -7$

## 10.3. Résoudre une équation

**Résoudre** une équation c'est **déterminer** la **valeur** de l'inconnue pour que l'égalité soit vérifiée

Pour **résoudre une équation** on **applique les propriétés des égalités pour isoler l'inconnue dans le membre de gauche.**

Exemple : $\frac{3x}{7} + 3 = 4$

$$\frac{3x}{7} + 3 - 3 = 4 - 3$$

$$\frac{3x}{7} = 1$$

$$\frac{3x}{7} \cdot 7 = 1 \cdot 7$$

$$3x = 7$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

## 10.4. Vérifier la solution d'une équation

Pour **vérifier** la solution d'une équation, il suffit de vérifier que **l'égalité** est **conservée** en **remplacant** l'inconnue par la solution trouvée.

Exemple : Soit la solution $\frac{7}{3}$ à vérifier pour l'équation $\frac{3x}{7} + 3 = 4$.

$$\frac{3 \cdot \frac{7}{3}}{7} + 3 = 4$$

$$\frac{7}{7} + 3 = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4 = 4$$

## 10.5. Les équations fractionnaires

Pour **résoudre une équation fractionnaire :**

- ✓ on **réduit** tous les termes / facteurs au **même dénominateur,**
- ✓ on **multiplie** les **deux** membres de l'équation par la valeur du **dénominateur** commun,
- ✓ on **résout** l'équation.

Exemple : $\frac{2x}{5} + 4 = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{6x}{15} + \frac{60}{15}\right) \cdot 15 = \left(\frac{5}{15}\right) \cdot 15$$

$$(6x + 60) - 60 = 5 - 60$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{-55}{6}$$

$$x = \frac{-55}{6} \qquad S = \left\{\frac{-55}{6}\right\}$$

## 10.6. La mise en équation

Pour **mettre un problème en équation :**

- ✓ on **détermine l'inconnue** qui est exprimée sous forme de **question** en langage courant,
- ✓ on **code** les **opérations** faites sur cette inconnue,
- ✓ on **repère** et **code** le mot de **vocabulaire** qui veut signifier **l'égalité**,
- ✓ on **code** le deuxième membre de l'égalité.

Exemple : **Un nombre est égal** à **son triple diminué de 19**. Quel est ce nombre ?

*x* représente le nombre recherché.

$$x = 3x - 19$$

# Les grandeurs proportionnelles

## 1. Grandeurs directement proportionnelles

### 1.1. Définition

Deux grandeurs sont **directement proportionnelles** si on peut **multiplier** toutes les valeurs de la première grandeur par un **même nombre** pour obtenir les valeurs correspondantes de la seconde grandeur.

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, on dresse un **tableau de proportionnalité.**

Exemple : Le nombre de blocs de feuilles et le prix d'achat total sont deux grandeurs directement proportionnelles.

| Nombres de fardes | Prix d'achat total (en euros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 6 |
| 10 | 12 |
| 15 | 18 |
| 25 | 30 |

**. 1,2**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombres de fardes** | 0 | 5 | 10 | 15 | 25 |
| **Prix d'achat total (en euros)** | 0 | 6 | 12 | 18 | 30 |

**. 1,2**

Il existe deux dispositions de tableaux utilisés pour les grandeurs directement proportionnelles.

## 1.2. Les propriétés des tableaux de proportionnalité

❖ Si on **multiplie / divise** la valeur d'une grandeur par un nombre, la valeur correspondante de l'autre grandeur est **multipliée / divisée** par le même nombre.

Exemple :

. 5

. 3

| Nombres de fardes | 0 | 5 | 10 | 15 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | 0 | 6 | 12 | 18 | 30 |

. 3

. 5

❖ Si on **additionne / soustrait** des valeurs d'une même grandeur, on peut effectuer la même opération sur les valeurs correspondantes de l'autre grandeur.

Exemple :

\+

| Nombres de fardes | 0 | 5 | 10 | 15 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | 0 | 6 | 12 | 18 | 30 |

\+

❖ Dans un tableau de proportionnalité, les **produits** des nombres **en croix** sont **égaux**.

Exemple :

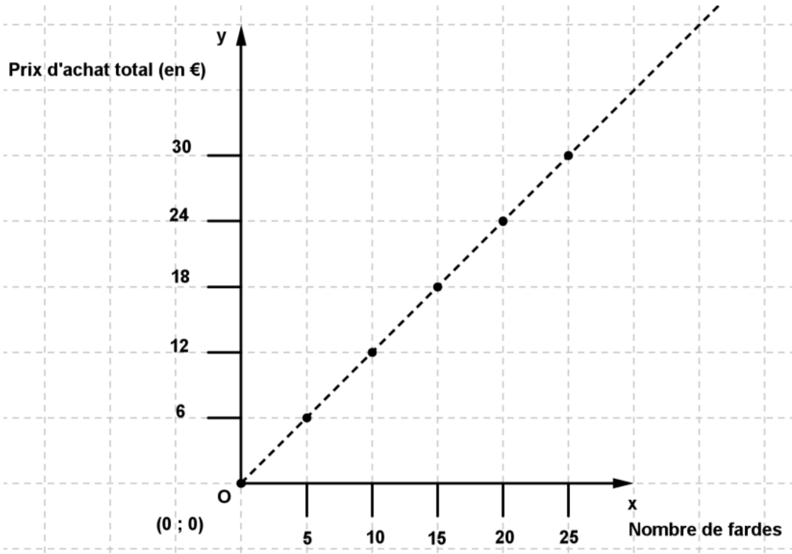
| Nombres de fardes | 0 | 5 | 10 | 15 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | 0 | 6 | 12 | 18 | 30 |

$$5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$$
$$= 60$$

### 1.3. La représentation graphique

❖ Sur un graphique cartésien, deux grandeurs directement proportionnelles sont représentées par une **demi-droite passant par l'origine**.

Exemple :




## 2. Le coefficient de proportionnalité

Le **coefficient de proportionnalité** est le **rapport** entre les **valeurs** de la première grandeur x et de la deuxième grandeur y. Il se note **k**.

Pour **calculer** le **coefficient de proportionnalité** d'un tableau, on **divise** une valeur de y par la valeur correspondante de x.

Exemple :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombres de fardes** | x | 0 | 5 | 10 | 25 |
| **Prix d'achat total (en euros)** | y | 0 | 6 | 12 | 30 |

k = $\frac{12}{10}$

= 1,2

$$\mathbf{k} = \frac{y}{x}$$

### 2.1. Calculer une valeur de la grandeur x

Pour **calculer** une valeur de la grandeur **x**, on **divise** la valeur correspondante de la grandeur **y** par le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

| Nombres de fardes | x | 5 | ? |
|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | y | 6 | 30 |

k = 1,2

**y : k = x**

**30 : 1,2 = 25**

### 2.2. Calculer une valeur de la grandeur y

Pour **calculer** une valeur de la grandeur **y** on **multiplie** la valeur correspondante de la grandeur **x** par le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

| Nombres de fardes | x | 5 | 25 |
|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | y | 6 | ? |

k = 1,2

**kx = y**

**25 . 1,2 = 30**

## 3. La règle de 3

Dans un problème faisant intervenir des grandeurs directement proportionnelles, on peut utiliser la **règle de 3** pour se passer du coefficient de proportionnalité.

Pour utiliser la règle de trois, on **ajoute** une **ligne centrale** dans le tableau pour lier les valeurs proposées en passant par **l'unité**.

Exemple : 6 cartables coutent 75 euros, combien coutent 10 cartables ?

: 6    . 10

| Nombres de cartables | x | 6 | 1 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Prix d'achat total (en euros) | y | 75 | $\frac{75}{6}$ | $\frac{75}{6} . 10 = 125$ |

: 6    . 10

## 4. Le pourcentage

### 4.1. Calculer le pourcentage d'un nombre

Pour **calculer x %** d'un nombre y, on multiplie ce nombre y par $\frac{x}{100}$.

Exemple : Soit à calculer le montant de la TVA à payer sur l'achat d'une voiture à 20 000 euros.
(La TVA s'élève à **21 %)**

| **Prix de la voiture (en euros)** | X | 100 | 35 000 |
|---|---|---|---|
| **Coût de la TVA (en euros)** | y | 21 | 7 350 |

k = $\frac{21}{100}$

= **21 %**

**21 % de 35 000 =** $\mathbf{\frac{21}{100}}$ **. 35 000 = 7350**

### 4.2. Augmenter un nombre de x %

Pour **augmenter un nombre de x %**, on multiplie ce nombre par $\frac{100+x}{100}$.

Exemple : Soit le nombre 2300 a augmenté de 17 %.

$$2300 \cdot \frac{100+17}{100} = 2300 \cdot \frac{117}{100} = 2691$$

### 4.3. Diminuer un nombre de x %

Pour **augmenter un nombre de x %**, on multiplie ce nombre par $\frac{100-x}{100}$.

Exemple : Soit le nombre 1700 a diminué de 32 %.

$$1700 \cdot \frac{100-32}{100} = 1700 \cdot \frac{68}{100} = 1156$$

# 5. L'échelle

## 5.1. Définition

**L'échelle** est le **rapport** entre la longueur d'un objet sur la représentation et sa longueur réelle.

$$\text{Échelle} = \frac{\textbf{longueur réduite}}{\textbf{longueur réelle}}$$

**L'échelle** est le **coefficient de proportionnalité** entre ces deux longueurs.

## 5.2. Calculer la longueur réelle

Pour **calculer la longueur réelle**, on **divise** la longueur réduite par **l'échelle**.

Exemple : Soit à calculer la longueur réelle correspondant à 6 cm sur une carte à l'échelle $\frac{1}{200\ 000}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Longueur réelle (en cm)** | X | 200 000 | **1 200 000** |
| **Longueur réduite (en cm)** | y | 1 | 6 |

$k = \frac{1}{200\ 000}$

$$\mathbf{6 : \frac{1}{200\ 000} = 6 \cdot 200\ 000 = 1\ 200\ 000}$$

## 5.3. Calculer la longueur sur la représentation

Pour **calculer la longueur réduite**, on **multiplie** la longueur réelle **par l'échelle**.

Exemple : Soit à calculer la longueur réduite correspondant à 8 km sur une carte à l'échelle $\frac{1}{200\ 000}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Longueur réelle (en cm)** | X | 200 000 | 800 000 |
| **Longueur réduite (en cm)** | y | 1 | **4** |

$k = \frac{1}{200\ 000}$

$$\mathbf{800\ 000 \cdot \frac{1}{200\ 000} = 800\ 000 \cdot 200\ 000 = 4}$$

## 6. Les rapports entre deux grandeurs

### 6.1. Définition

Le **rapport** entre deux grandeurs est une **fraction** qui compare deux **valeurs correspondantes** de ces grandeurs.

Exemple : **Antécédent / numérateur** ← $\mathbf{\frac{12,1}{30}}$ est un rapport
**Conséquent / dénominateur** ←

### 6.2. Les rapports inverses

Deux **rapports** sont **inverses** si **l'antécédent** de l'un est le **conséquent** de l'autre et inversement.

Exemple : $\frac{-2}{5}$ et $\frac{-5}{2}$ sont des rapports inverses.

❖ Le **produit** de deux rapports inverses est **égal à 1.**

Exemple : $\frac{17,2}{3} \cdot \frac{3}{17,2} = 1$

## 7. Les proportions

### 7.1. Définition

Une **proportion** est une **égalité** entre deux **rapports**.

Soit la proportion :

**Extrême** ← $a$ ; $c$ → **Moyen**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**Moyen** ← $b$ ; $d$ → **Extrême**

Exemple : $\frac{35}{15} = \frac{10,5}{4,5}$ est une proportion. 35 et 4,5 sont les **extrêmes**

15 et 10,5 sont les **moyens**.

### 7.2. La propriété fondamentale des proportions

- Dans toute proportion, le produit des **extrêmes** est **égal** au **produit** des **moyens**.

  Exemple : $\frac{35}{15} = \frac{10,5}{4,5}$ <=> **35 . 4,5 = 10,5 . 15**

### 7.3. Les propriétés des proportions

- Dans toute proportion, on peut **permuter les extrêmes** et conserver l'égalité.

  Exemple : Si $\frac{35}{15} = \frac{10,5}{4,5}$ alors, $\frac{4,5}{15} = \frac{10,5}{35}$

- Dans toute proportion, on peut **permuter les moyens** et conserver l'égalité.

  Exemple : Si $\frac{35}{15} = \frac{10,5}{4,5}$ alors, $\frac{35}{10,5} = \frac{15}{4,5}$

- Dans toute proportion, on peut **permuter les moyens entre eux et les extrêmes entre eux** et conserver l'égalité.

  Exemple : Si $\frac{35}{15} = \frac{10,5}{4,5}$ alors, $\frac{4,5}{10,5} = \frac{15}{35}$

## 8. La 4e proportionnelle

### 8.1. Définition

La 4e proportionnelle est le **quatrième terme** d'une proportion.

### 8.2. Déterminer la 4e proportionnelle

Pour **déterminer la 4e proportionnelle** d'une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , on applique les formules :

$a = \frac{b\,.\,c}{d}$ b = $\frac{a\,.\,d}{c}$ $c = \frac{a\,.\,d}{b}$ $d = \frac{b\,.\,c}{a}$

Exemples :

Si $\frac{a}{5} = \frac{70}{175}$, alors $a = \frac{5\,.\,70}{100} = 2$

Si $\frac{-3}{11} = \frac{c}{121}$, alors $c = \frac{-3\,.\,121}{11} = -33$

Si $\frac{4}{b} = \frac{12}{48}$, alors $b = \frac{4\,.\,48}{12} = 16$

Si $\frac{-45}{-17} = \frac{135}{d}$, alors $d = \frac{-17\,.\,135}{-45} = 51$

# La représentation et le traitement de données

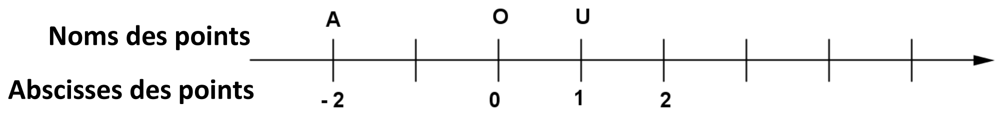
## 1. Le repérage sur une droite

### 1.1. La droite graduée

Une **droite graduée** est une droite **orientée** (= munie d'une **flèche**) et divisée en **intervalles égaux**. La droite graduée est déterminée par au moins **deux points** qui forment le **repère** :

- le point « **origine** » **d'abscisse 0** ;
- le point « **unitaire** » **d'abscisse 1**.

Exemple :




### 1.2. L'abscisse d'un point

Chaque **point** d'une droite est **repéré** par un nombre appelé son **abscisse**.

Exemple : Sur la droite graduée ci-dessus, l'abscisse du point A est $-2$.

Au lieu de parler de **droite graduée**, on parle aussi **d'axe**.

## 2. Le repérage dans le plan

### 2.1. Le plan cartésien

Le **plan cartésien** est un plan muni de **deux axes** généralement **perpendiculaires** se coupant en leur **origine**.

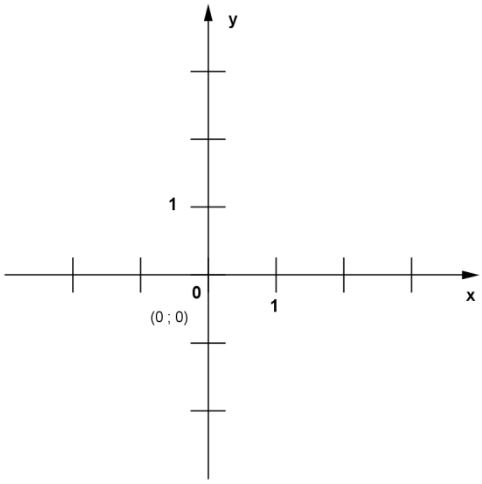
### 2.2. Les axes

La droite graduée **horizontale** s'appelle **l'axe des abscisses** ou **l'axe des x**.
La droite graduée **verticale** s'appelle **l'axe des ordonnées** ou **l'axe des y**.

## 2.3. L’origine

Le **point « origine »** est le point **d’intersection** des deux axes du plan cartésien.
Ses **coordonnées** sont **(0 ; 0).**

Exemple :



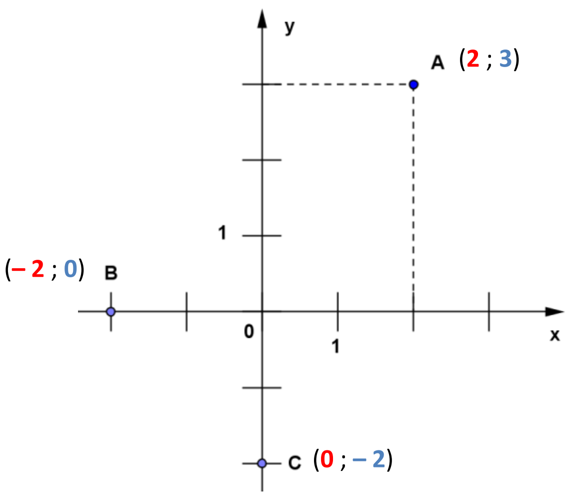

## 2.4. Les coordonnées d’un point

Chaque point du plan cartésien est repéré par un **couple** de nombres **(x ; y)** appelé couple de **coordonnées du point**.
Le **premier** nombre (x), **l’abscisse**, est la distance horizontale de ce point à l’axe des ordonnées ;
le **second** nombre (y), **l’ordonnée**, est la distance verticale de ce point à l’axe des abscisses.

## 2.5. Les propriétés de points particuliers

- Les **points** situés sur l’axe des **abscisses** ont une **ordonnée nulle**.
- Les **points** situés sur l’axe des **ordonnées** ont une **abscisse nulle**.

Exemple :

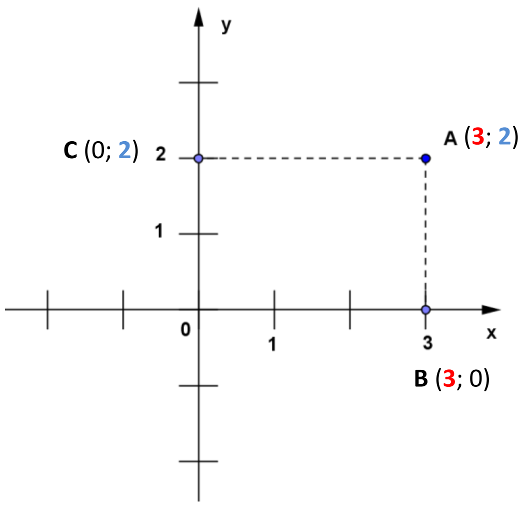


### 2.6. Repérer un point dans le plan cartésien

Pour **repérer un point A** dans le plan cartésien :

- ✓ on **trace** la **perpendiculaire** à **l'axe** des **x** passant par le point A,
- ✓ le **point** situé à **l'intersection** de l'axe et de la perpendiculaire donne **l'abscisse** du point A,
- ✓ on **trace** la **perpendiculaire** à **l'axe** des **y** passant par le point A,
- ✓ le **point** situé à **l'intersection** de l'axe et de la perpendiculaire donne **l'ordonnée** du point A.

Exemple :




### 2.7. Placer un point dans le plan cartésien

Pour **placer un point A de coordonnées (x ; y)** dans le plan cartésien :

- ✓ on place sur l'axe des x le point de coordonnées (x ; 0),
- ✓ on **trace** la **perpendiculaire** à **l'axe** des **x** passant par ce point,
- ✓ on place sur l'axe des y le point de coordonnées (0 ; y),
- ✓ on **trace** la **perpendiculaire** à **l'axe** des **y** passant par ce point,
- ✓ le **point** A est situé à **l'intersection** des deux perpendiculaires.

## 3. Le tableau de données

### 3.1. La construction d'un tableau groupé de données

Pour **réaliser un tableau groupé de données** à partir des résultats d'un sondage,

- ✓ on trace un tableau à deux colonnes,
- ✓ on recense les différentes réponses dans la première colonne,
- ✓ on note, pour chaque réponse, le nombre de répétitions dans la deuxième colonne.

Exemple : Enquête sur les animaux préférés des élèves de 3TTSA.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Chien | Tigre | Lapin | Dauphin |
| Chat | Chat | Chien | Chat |
| Chien | Tigre | Tigre | Chien |
| Dauphin | Chien | Tigre | Lapin |

| Animal préféré | Nombre d'élèves |
|---|---|
| Chien | 5 |
| Chat | 3 |
| Lapin | 2 |
| Dauphin | 2 |
| Tigre | 4 |

## 4. Les différentes formes de représentations

### 4.1. Le diagramme circulaire

Le **diagramme circulaire** est utilisé pour répartir et visualiser les différentes parties d'un tout.

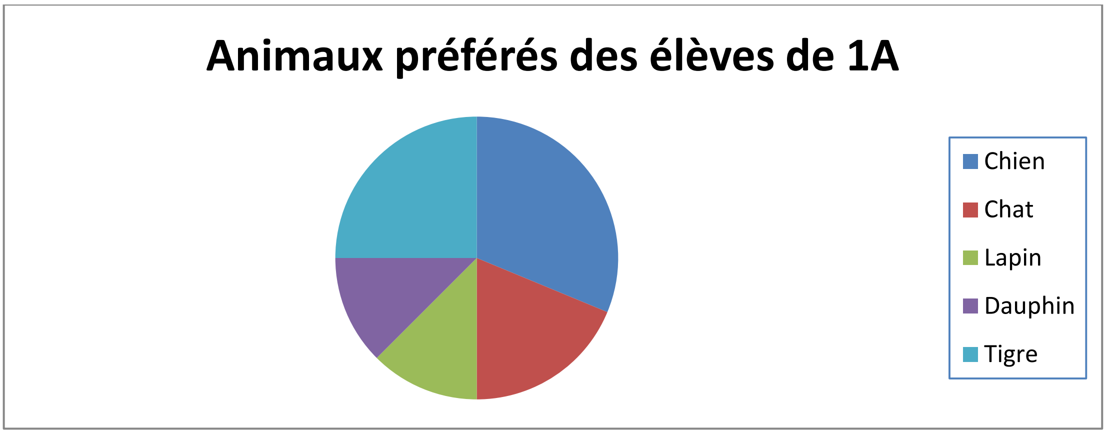
Pour **réaliser un diagramme circulaire**,

- ✓ on **construit** le **tableau** qui reprend les deux grandeurs en **ajoutant** une colonne reprenant **l'amplitude** des **secteurs angulaires arrondies** au degré près,
- ✓ on **vérifie** que la **somme** des **amplitudes** des angles vaut 360°,
- ✓ on **trace** un **disque** en (respectant le rayon s'il est donné),
- ✓ on **partage** le disque en **secteurs angulaires** selon les amplitudes du tableau,
- ✓ on note la **légende** et **colorie** les différents **secteurs angulaires**,
- ✓ on note le **titre** du graphique.

Exemple :

**: 16** et . 360

| Animaux préférés des élèves de 1A | Nombre d'élèves | Amplitude en degrés |
|---|---|---|
| Chien | 5 | 112° |
| Chat | 3 | 68° |
| Lapin | 2 | 45° |
| Dauphin | 2 | 45° |
| Tigre | 4 | 90° |
| TOTAL | **16** | 360° |



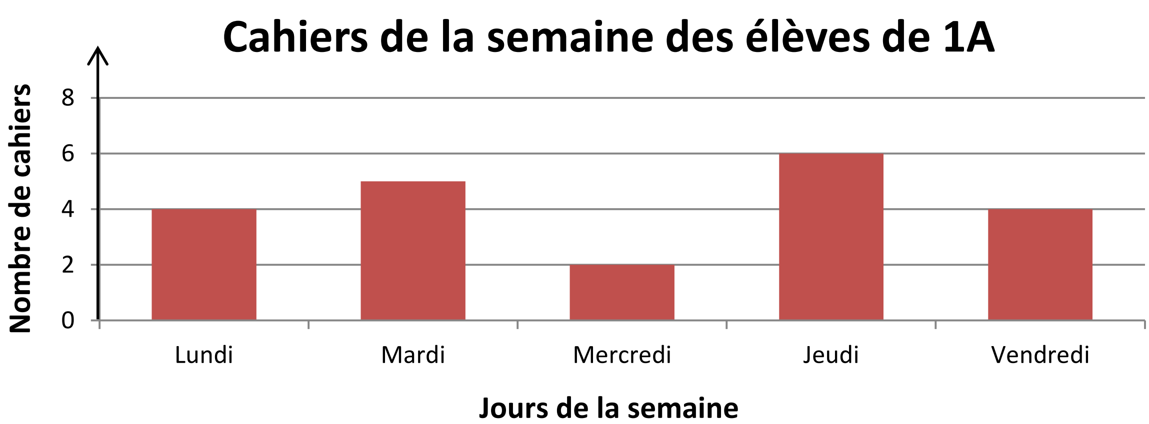

## 4.2. Le graphique en bâtonnets

Le **graphique en bâtonnets** est utilisé pour faire ressortir la **répétition** ou la **fréquence** de données numériques.

Pour **réaliser un graphique en bâtonnets**,
- ✓ on **construit** le **tableau** groupé,
- ✓ on **trace** deux **droites perpendiculaires** (l'une horizontale, l'autre verticale),
- ✓ on **nomme** les **droites** à l'aide des grandeurs comparées,
- ✓ on **indique** entre **parenthèses l'unité** de chaque grandeur près de leur nom,
- ✓ on **gradue** les deux **droites**,
- ✓ on **trace** les **bâtonnets** dont la hauteur correspond aux nombres de la colonne 2,
- ✓ on note le **titre** du graphique.

Exemple :

| Jours de la semaine | Nombre de cahiers |
|---|---|
| Lundi | 4 |
| Mardi | 5 |
| Mercredi | 2 |
| Jeudi | 6 |
| Vendredi | 4 |



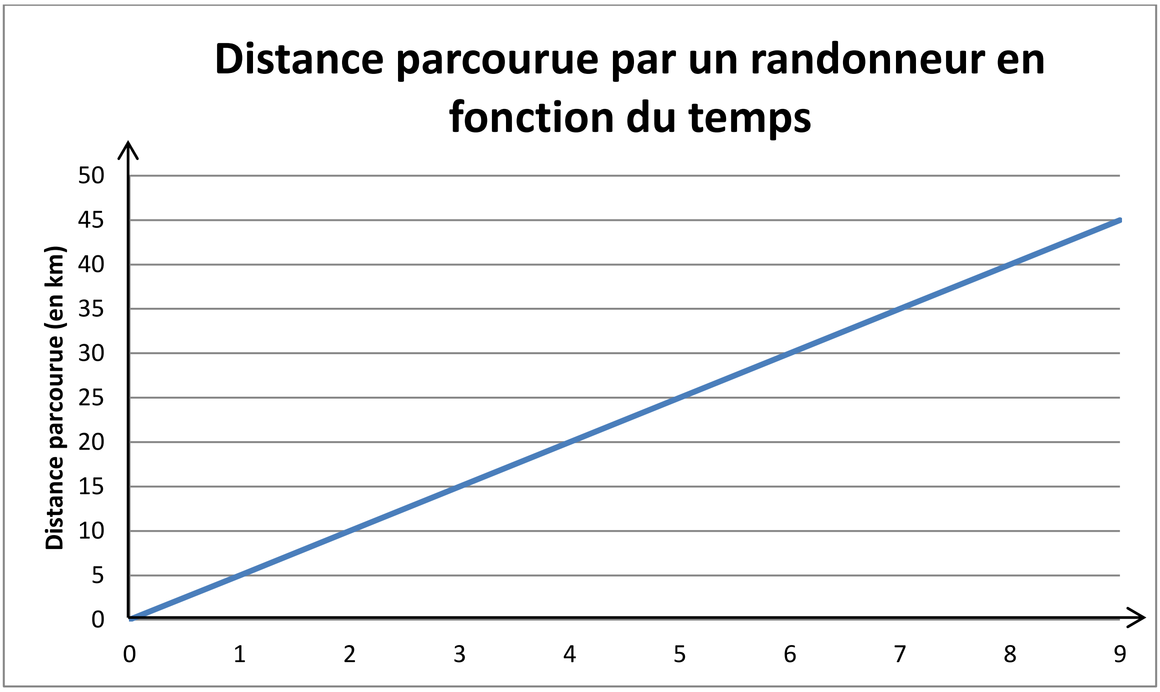
## 4.3. Le graphique évolutif

Le **graphique évolutif** est utilisé pour montrer **l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur.**

Pour **réaliser un graphique en bâtonnets**,
- ✓ on **construit** le **tableau** groupé,
- ✓ on **trace** deux **axes** perpendiculaires (l'un horizontal, l'autre vertical),
- ✓ on **nomme** les **axes** à l'aide des grandeurs comparées (souvent **l'axe horizontal** est utilisé pour les unités de **temps**),
- ✓ on **indique** entre **parenthèses l'unité** de chaque grandeur près de leur nom,
- ✓ on **gradue** les **deux** axes : on **calcule** l'écart entre la valeur **minimale** et la valeur **maximale** de chaque grandeur et on calcule alors une **échelle** qui convient,
- ✓ on **repère** les **points** dans le graphique en utilisant leurs **coordonnées**,
- ✓ on **trace** le **graphe** en joignant tous les points obtenus à la **latte**.
- ✓ on note le **titre** du graphique.

Exemple :

| **Distance parcourue par le randonneur (en km)** | 0 | 2 | 3 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Durée (en h)** | 0 | 10 | 15 | 20 | 45 |




**Durée (en h)**

# 5. Le traitement de données

## 5.1. Vocabulaire

- La **population** est le groupe de personnes sur lequel porte une étude statistique.
  On travaille souvent avec un **échantillon** représentatif de la population.
- La **variable** est le **caractère commun** étudié sur les individus de l'échantillon.
- Une variable est **quantitative** si les valeurs qu'elle peut prendre sont numériques (s'expriment par des nombres).
- Une variable est **qualitative** si les valeurs qu'elle peut prendre sont non numériques (s'expriment par des mots).

Exemple : On demande à un groupe d'élèves de 2$^{e}$ année leur couleur préférée. Voici les résultats :

| **Couleurs préférées** | Rouge | Bleu | Vert | Rose | Noir |
|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 12 | 10 | 7 | 5 | 6 |

**Population** : les élèves de 2$^{e}$ année
**Caractère / variable étudié(e)** : la couleur préférée
**Valeurs de la variable** : Rouge, bleu, vert, rose, noir
**Caractère de la variable** : qualitative
Si on interroge les élèves sur leur taille, la variable sera quantitative.

- **L'effectif** d'une valeur est le nombre de fois que cette valeur apparaît dans les données.
  La liste des valeurs de la variable et de leur effectif est la série de données.
- **L'effectif total** d'une série est le nombre total de données, cela correspond au nombre de réponses obtenues.
- La **fréquence** d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Exemple :
Dans l'exemple ci-dessus :
- **l'effectif** de la valeur « rouge » est 12 ;
- **l'effectif total** est de 12 + 10 + 7 + 5 + 6 = 40 ;
- **la fréquence** de la valeur « rouge » est de $\frac{12}{40}$ = 30 %

| **Couleurs préférées** | Rouge | Bleu | Vert | Rose | Noir | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 12 | 10 | 7 | 5 | 6 | 40 |

Effectif total

Effectif de la variable « rouge »

$\frac{7}{40}$ = fréquence de la variable « vert »

## 5.2. Valeurs centrales et étendue

La **moyenne** d'une série de données **quantitatives** s'obtient en **divisant** la **somme** de toutes les valeurs par **l'effectif total**.

Exemple : Résultats d'un test de français dans une classe de 1e secondaire (notes sur 10) :

7 ; 4 ; 10 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 3 ; 7 ; 9 ; 9.

La **moyenne** de la classe vaut : $\frac{7+4+10+9+8+7+6+5+3+7+9+9}{12} = 7$

Pour calculer la **moyenne** avec un tableau groupé,

- ✓ on **multiplie** chaque **valeur par l'effectif** correspondant,
- ✓ on **additionne** les **produits** obtenus,
- ✓ on **divise la** somme **par l'effectif total**.

Exemple :

| **Cotes** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |

**Moyenne** des cotes = $\frac{1.3 + 4.1 + 5.1 + 6.1 + 7.3 + 8.1 + 9.3 + 10.1}{12} = 7$

La **moyenne** n'a **pas** de **sens** dans le cas de variables

Le **mode** d'une série de données est la valeur qui a **l'effectif** le plus **élevé**.

Exemple : Dans l'exemple des couleurs, le **mode** est « Rouge ».

Dans l'exemple des cotes, les **modes** sont 7 et 9.

**L'étendue** d'une série de données **quantitatives** est la **différence** entre la plus **grande** et la plus **petite** valeur.

Exemple : Dans l'exemple des cotes, **l'étendue** vaut 10 – 3 = 7.

**L'étendue** n'a **pas** de **sens** dans le cas de variables **qualitatives**.

# Les éléments de géométrie élémentaire

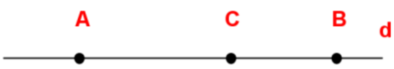
## 1. La droite

### 1.1. Définition et notations

Une **droite** est un ensemble **infini** de points alignés. Elle est **illimitée** dans les 2 sens.
Une droite se note :

- soit par une lettre **minuscule**,
- soit en notant **deux** de ses **points**.

Exemple :




La droite représentée se nomme **d** ou **AB** ou **AC** ou **BC**.

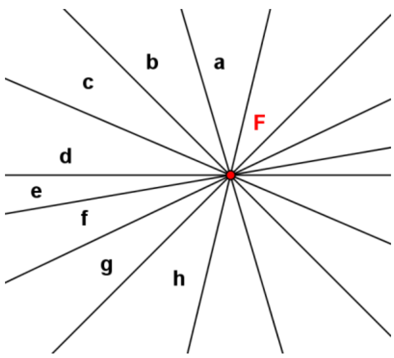
### 1.2. Les propriétés de la droite

❖ **Deux points** distincts déterminent une et **une seule droite**.

Exemple : Soit les points A et B.


❖ Par un **point** passent une **infinité** de droites.

Exemple : Soit le point F.




Un **point** se note TOUJOURS par une lettre **majuscule**.

## 2. La demi – droite

Une **demi – droite** est une **partie** de droite **limitée** dans un sens par un point appelé origine **et illimitée** dans l'autre sens.

Exemple :


La demi – droite représentée se nomme **[FG** (ou plus rarement **GF]**).

## 3. Le segment de droite

### 3.1. Définition et notation

Le **segment de droite** est une **partie** de droite **comprise** entre **deux** de ses **points**.
Le segment de droite se **note** à l'aide des **2 points** situés à ses **extrémités** encadrés de **crochets**.

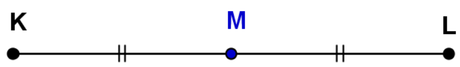
Exemple :


Le segment de droite représenté se nomme **[KL]** ou **[LK]**.

### 3.2. Le milieu d'un segment

Le **milieu d'un segment** est le **point** de ce segment situé à **égale distance** de ses **extrémités**.

Exemple : Soit le segment [KL].



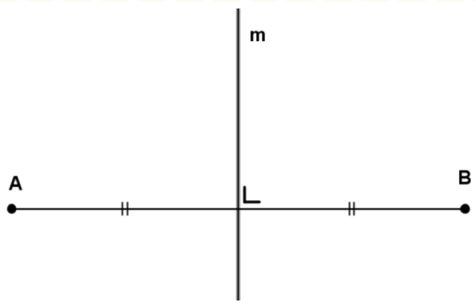

❖ **M est le milieu de [KL] si et seulement si M ∊ [KL] et |KM| = |ML|**

### 3.3. La médiatrice d'un segment

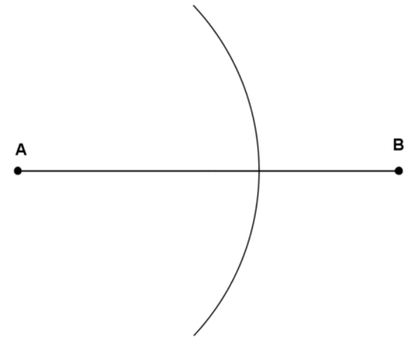
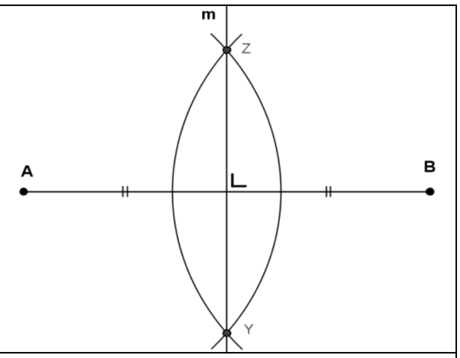
#### 3.3.1. Définition

La **médiatrice d'un segment** est la **droite perpendiculaire** au segment passant par le **milieu** de ce segment.

Exemple :



### 3.3.2. La construction au compas de la médiatrice

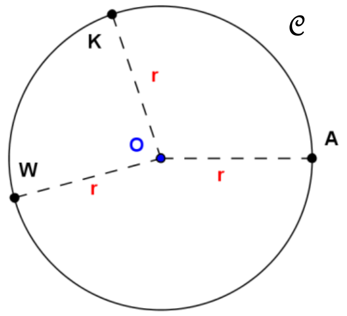
| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| On veut construire **m** la médiatrice de [AB]. | On trace un premier **arc** de **cercle** de centre **A** et on prend un **écartement** de compas **plus grand** que la **moitié** du segment. | On trace un deuxième **arc** ce **cercle** de centre **B** et de **même** rayon.<br><br>On **relie** les deux **points d'intersection** des arcs de cercles. |

## 4. Le cercle

### 4.1. Définition et notation

Le **cercle** est l'ensemble des points situés à une **distance r** d'un **point** fixe appelé **centre**.
Le cercle de centre O et de rayon r se note $\mathcal{C}_{(O,\,r)}$ .

Exemple : Soit le cercle $\mathcal{C}$
Son rayon = **r**
Son centre est le point **O**.




## 4.2. Les éléments du cercle

**La corde**

Une **corde** d’un cercle est un **segment** joignant deux points quelconques de ce cercle.

**Le diamètre**

Un **diamètre** d’un cercle est une **corde** qui contient le **centre** de ce

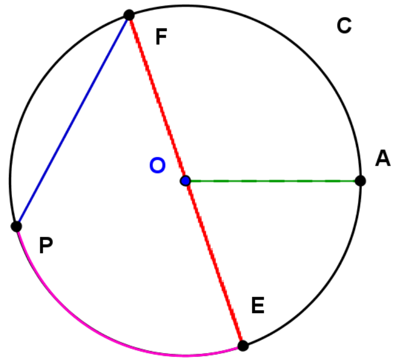
**Le rayon**

Un **rayon** d’un cercle est un **segment** joignant le centre de ce cercle à un point quelconque de ce cercle.

**L’arc de cercle**

**L’arc de cercle** est une portion de cercle.

Exemples :




**[FP]** et **[FE]** sont des **corde**s du cercle.

**[FE]** est un **diamètre** du cercle.

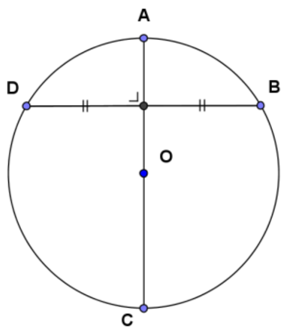
**[OA]** est un **rayon** du cercle.

$\overset{\frown}{PE}$ est un **arc de cercle.**

## 4.3. Les propriétés du diamètre

- Tout **diamètre** partage le cercle en **deux arcs** de cercle de **même longueur**.
- Le **diamètre** est la plus **grande** de toutes les **cordes** d’un cercle.
- Tout **diamètre perpendiculaire** à une corde est la **médiatrice** de cette corde.

Exemple :

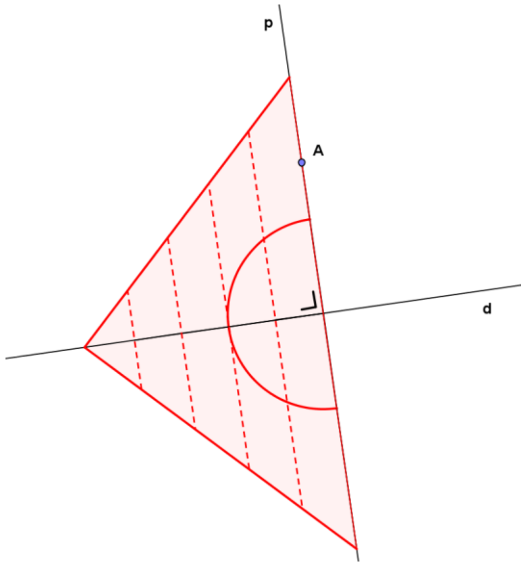


# 5. Les tracés

## 5.1. La perpendiculaire à une droite

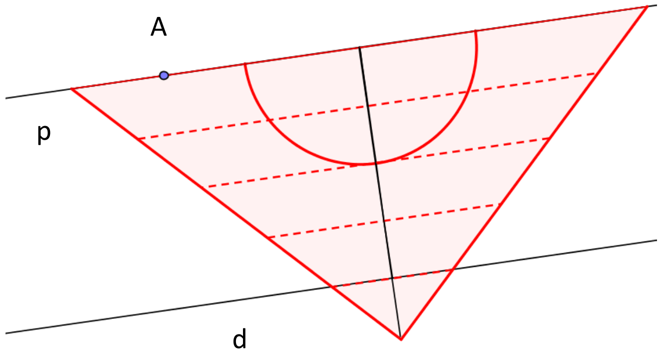
Pour tracer la **perpendiculaire** à une droite donnée, passant par un **point** donné, on peut utiliser **l'équerre** à **parallèles**.

Exemple :




## 5.2. La parallèle à une droite

Pour tracer la **parallèle** à une droite donnée, passant par un **point** donné, on peut utiliser **l'équerre** à **parallèles**.



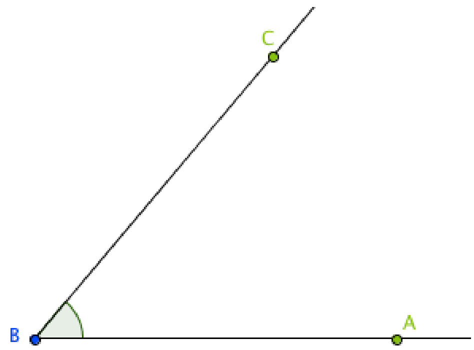

# Les angles

## 1. Vocabulaire

### 1.1. Définition et notations

Un **angle** est une partie illimitée du plan déterminée par **deux demi-droites** de même origine.

Exemple : Soit un angle.



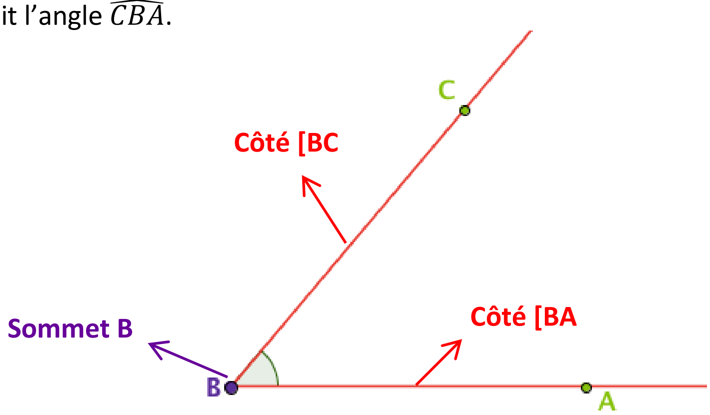

L'angle représenté se nomme $\widehat{B}$ ou $\widehat{CBA}$ ou $\widehat{ABC}$.

Dans la notation d'un angle, la **lettre** désignant son **sommet** est toujours placée **entre** les deux autres.

### 1.2. Les éléments et leurs notations

Le **sommet** d'un angle est le **point d'origine** des deux côtés de cet angle.
Les **côtés** d'un angle sont les **deux demi-droites** de même origine qui détermine cet angle.

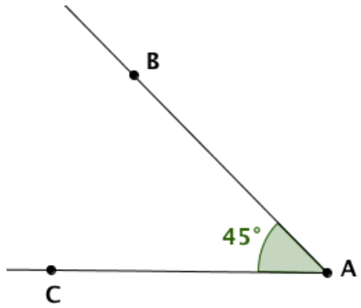
Exemple : Soit l'angle $\widehat{CBA}$.



## 2. L’amplitude d’un angle

**L’amplitude** d’un angle est la **mesure** de cet angle déterminée par son **ouverture**.

Exemple :




L’amplitude de l’angle $\widehat{BAC}$ se note :

$$\begin{cases} \mathbf{ampl.}\,\widehat{BAC} \text{ ou plus simplement } \mathbf{ampl.}\,\widehat{A}. \\ |\widehat{BAC}| \text{ ou plus simplement } |\widehat{A}|. \end{cases}$$

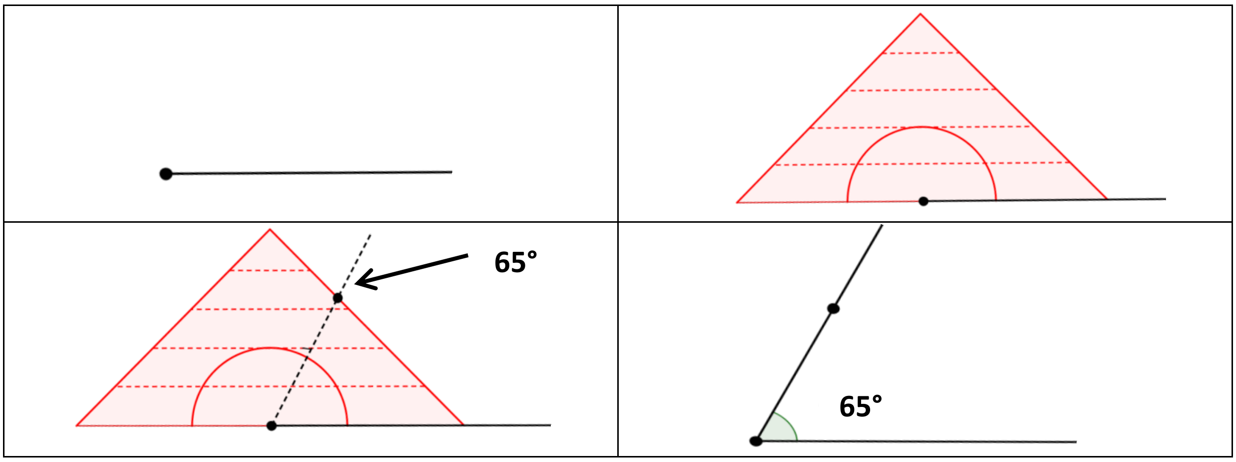
Un angle se **mesure** en **degrés** dont le symbole est « ° ».

### 2.1. Tracer un angle d’amplitude donnée

Pour **tracer un angle d’amplitude donnée :**

- ✓ on **trace** une première **demi-droite**,
- ✓ on **place** le repère **zéro** de l’équerre **sur l’origine** de la demi-droite et le **côté** de l’équerre **sur** la **demi-droite**,
- ✓ on **place** un **point** sur la graduation qui correspond à l’amplitude donnée en partant du zéro de la graduation,
- ✓ on **trace** une deuxième **demi-droite** de **même origine** que la première et **passant** par le **nouveau point** placé.

Exemple :




Pour une amplitude $\alpha$ **supérieure à 180°**, on trace l’angle d’amplitude **360° –** $\boldsymbol{\alpha}$ et on marque l’angle **rentrant**.

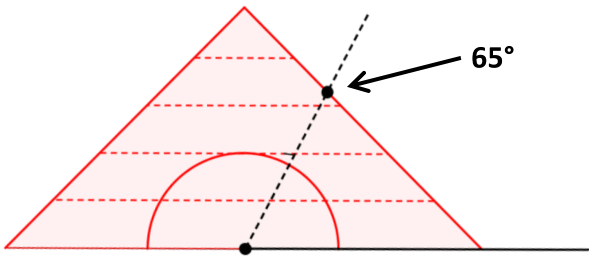
### 2.2. Mesurer un angle donné

Pour **mesure un angle donné :**

- ✓ on **place** le repère zéro sur le sommet de l'angle et on aligne le grand côté de l'équerre sur un côté de l'angle,
- ✓ on **lit** la mesure de l'angle indiquée par le deuxième côté en partant du zéro de la graduation.

Il est parfois nécessaire de prolonger les côtés de l'angle pour lire la graduation.

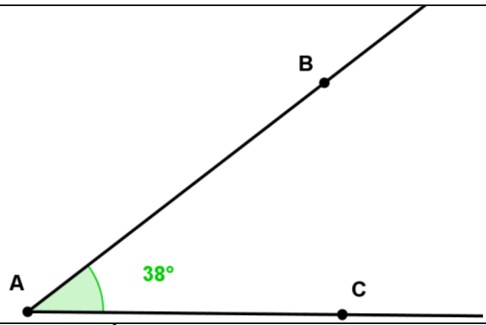
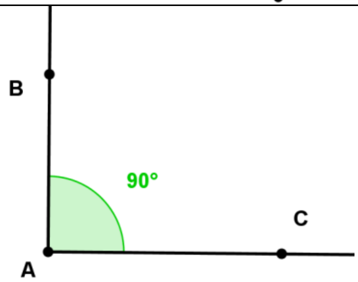
Exemple :

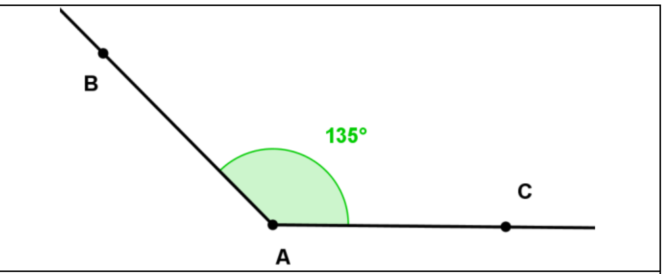
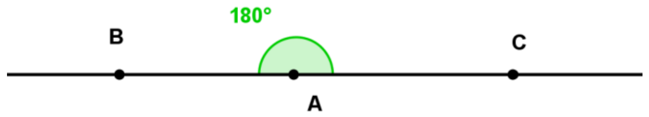
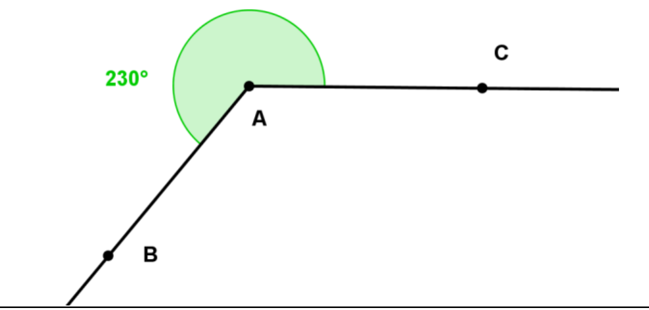
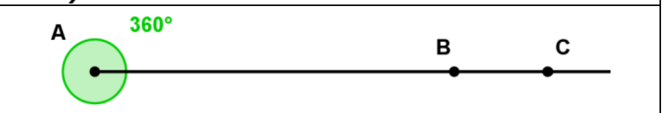



## 3. Le classement des angles

### 3.1. Caractérisation d'un angle

**Un angle** peut être :

| Nom | Définition | Exemple |
|---|---|---|
| **Nul** | Un angle est **nul** si son **amplitude** vaut **0°.** |   |
| **Aigu** | Un angle est **aigu** si son **amplitude** est strictement comprise **entre 0° et 90°**. |   |
| **Droit** | Un angle est **droit** si son **amplitude** vaut **90°.** |   |

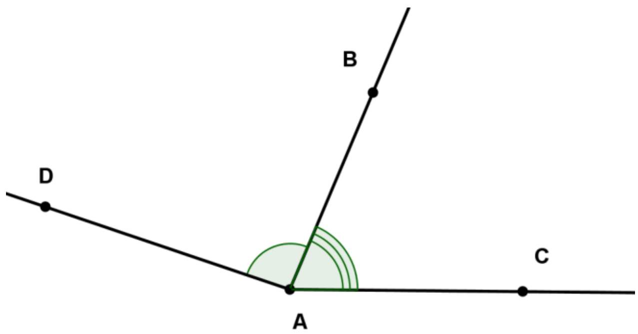
| | | |
|---|---|---|
| **Obtus** | Un angle est **obtus** si son **amplitude** est strictement comprise **entre 90° et 180°.** |  |
| **Plat** | Un angle est **plat** si son **amplitude** vaut **180°.** |  |
| **Rentrant** | Un angle est **rentrant** si son **amplitude** est **supérieure** à **180°.** |  |
| **Plein** | Un angle est **plein** si son **amplitude** vaut **360°.** |  |

## 3.2. Caractérisation de deux angles

### 3.2.1. Les angles adjacents

**Deux angles adjacents** sont deux angles qui :
- possèdent le **même sommet**,
- possèdent un **côté commun**,
- sont situés de **part** et **d'autre** de ce côté commun.

Exemple : Soit les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$.



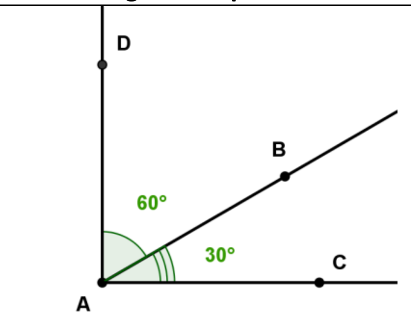
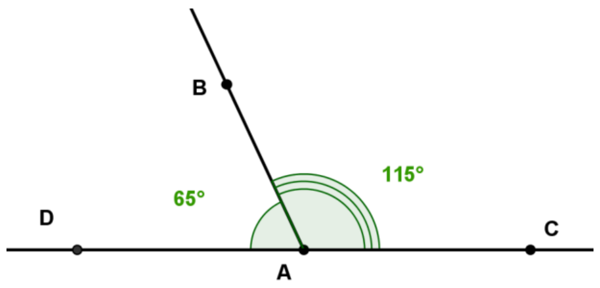
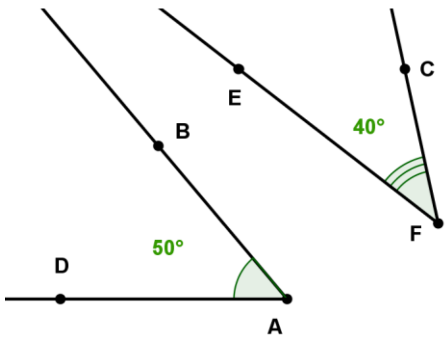
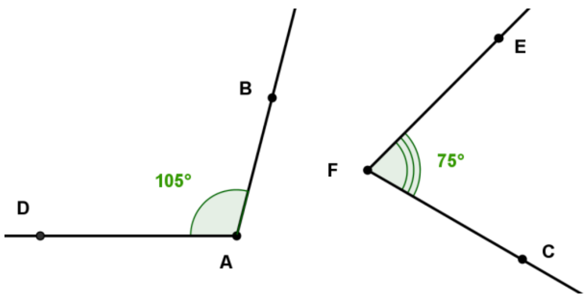

Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$ sont adjacents car ils ont le même sommet A, le côté [AB en commun et ils sont situés de part et d'autre de [AB.

## 3.2.2. Les angles complémentaires et supplémentaires

**Deux angles** sont **complémentaires** si la **somme** de leurs amplitudes vaut **90°.**

**Deux angles** sont **supplémentaires** si la **somme** de leurs amplitudes vaut **180°.**

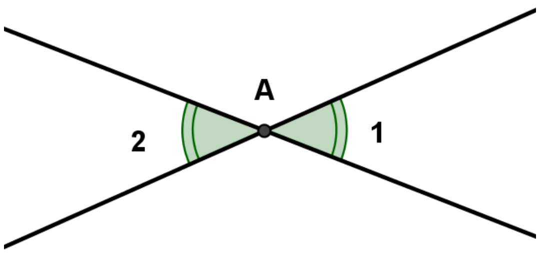
Exemples : Soit les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EFC}$.

| | 2 angles **complémentaires** | 2 angles **supplémentaires** |
|---|---|---|
| 2 angles **adjacents** |  |  |
| 2 angles **non-adjacents** |  |  |

## 3.2.3. Les angles opposés par le sommet

❖ Deux angles **opposés par le sommet** sont deux angles dont les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Exemple :

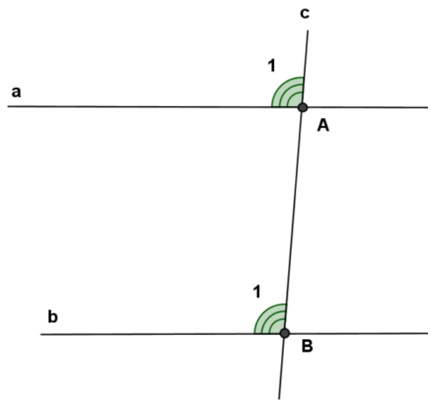



Les angles **opposés par le sommet** ont toujours la **même amplitude**.

### 3.2.4. Les angles formés par deux parallèles et une sécante

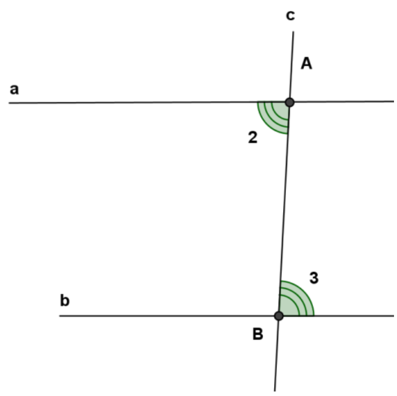
- Deux angles **correspondants** sont situés du **même côté** de la **sécante**, l'un à **l'intérieur** des deux **parallèles** et l'autre à **l'extérieur**.

Exemple :



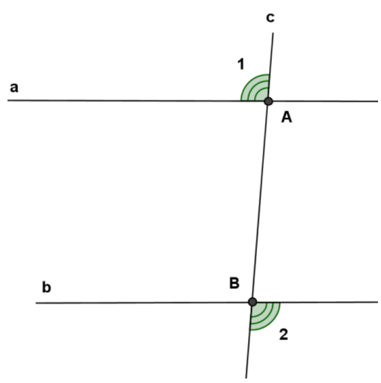

- Deux angles **alternes-internes** sont situés du **part et d'autre** de la **sécante**, à **l'intérieur** des deux **parallèles**.

Exemple :




- Deux angles **alternes-externes** sont situés du **part et d'autre** de la **sécante**, à **l'extérieur** des deux **parallèles**.

Exemple :

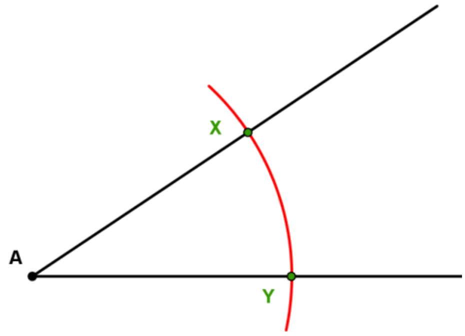


## 4. Reporter un angle donné

Pour **reporter un angle donné,** avec le compas **:**

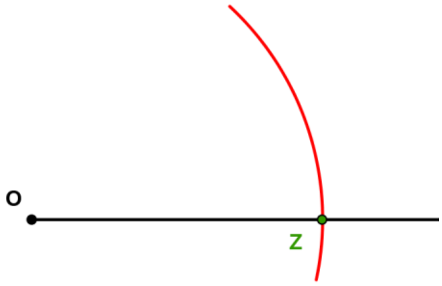
- ✓ on **place** la **pointe** sèche du compas sur le **sommet** de l'angle à reporter,
- ✓ on **trace** sur l'angle à reporter un **arc** de cercle qui **coupe** les **deux côtés** de l'angle,
- ✓ on **nomme** les deux **points d'intersection** X et Y.

Exemple :



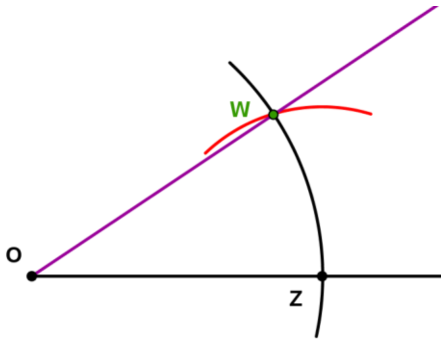

- ✓ On **trace** une **demi-droite** d'origine O,
- ✓ on **trace** un **arc** de cercle de centre O en gardant la **même ouverture** de compas,
- ✓ on **nomme l'intersection** de l'arc de cercle et de la demi-droite Z.

Exemple :




- ✓ On **place** les **pointes** du compas sur X et Y,
- ✓ on **trace** un **arc** de cercle de centre Z en gardant la **même ouverture** de compas,
- ✓ on **nomme l'intersection** des deux arcs de cercles W.
- ✓ on **trace** [OW.

Exemple :



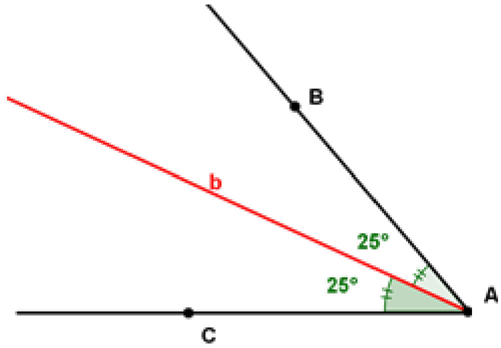
## 5. La bissectrice d'un angle

### 5.1. Définition

La **bissectrice** d'un angle est la **demi - droite** qui passe par le **sommet** de cet angle et qui le partage en **deux angles** de **même amplitude**.

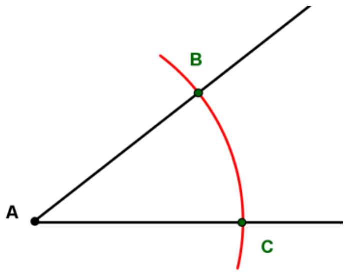
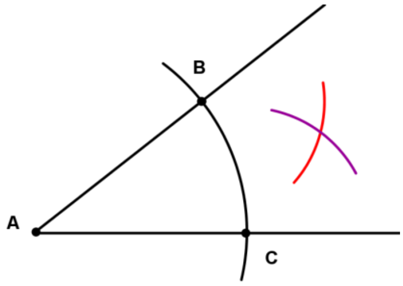
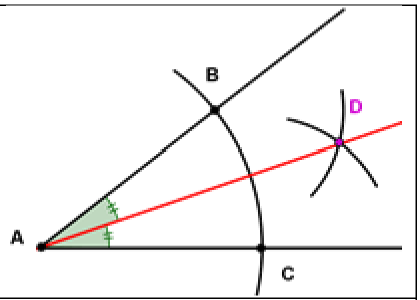
Exemple :

**b** est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.




### 5.2. La construction d'une bissectrice

Soit un angle $\hat{A}$ d'amplitude quelconque.

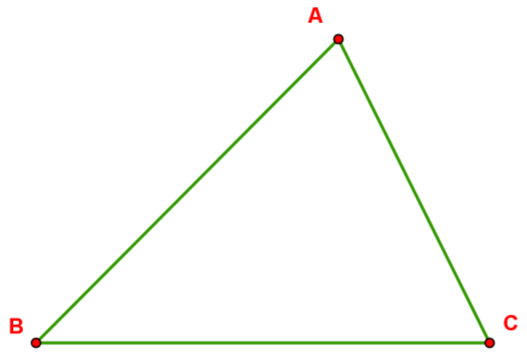
| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| On **trace** un **arc de cercle** de centre A et de rayon quelconque. L'arc **coupe** les côtés de l'angle en **B** et **C**. | On trace **2 arcs de cercles** de centres **C** et **B** et de rayons **identiques**. | On place le **point D** à **l'intersection** des 2 arcs de cercle.<br><br>On **trace** la demi - droite **[AD**. |

# Les triangles

## 1. Définition

Un **triangle** est un **polygone** à **3** côtés.

Exemples :

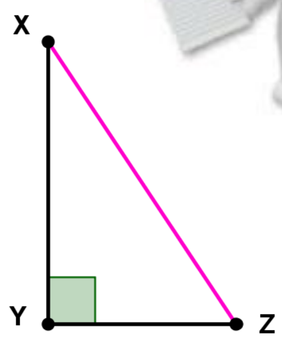



A, B et C sont appelés les **sommets** du triangle.

**[AB]**, **[BC]** et **[CA]** sont appelés les **côtés** du triangle.

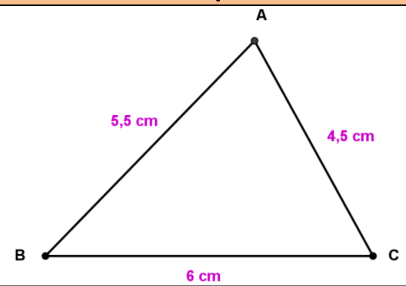
Dans un triangle **rectangle**, le côté **opposé à l'angle droit** ( = **le plus grand côté**) est appelé **l'hypoténuse**.

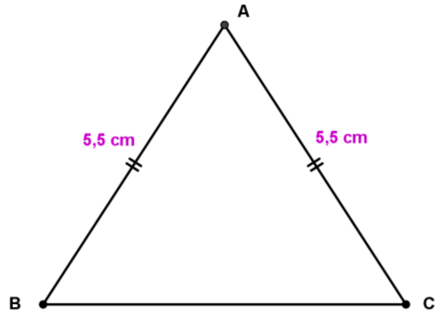
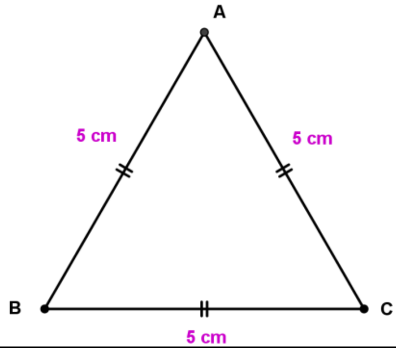
Dans le triangle rectangle XYZ, l'hypoténuse est le côté **[XZ]**.



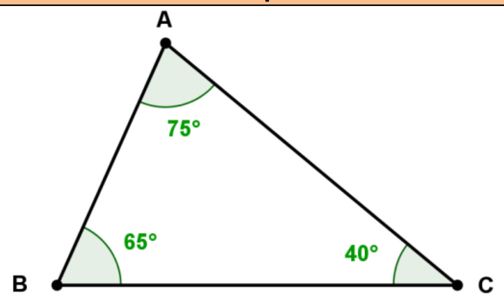
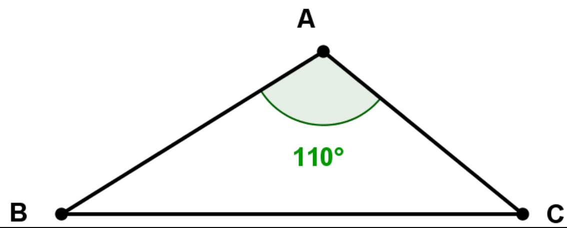
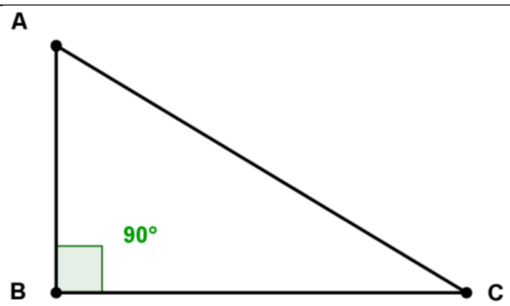

## 2. La classification des triangles

### 2.1. Selon les côtés

| Noms | Caractéristiques | Exemples |
|---|---|---|
| Triangle **scalène** | **3 côtés** de longueurs **différentes** |  |

| | | |
|---|---|---|
| Triangle **isocèle** | **Au moins 2 côtés** de **même** longueur |  |
| Triangle **équilatéral** | **3 côtés** de **même** longueur |  |

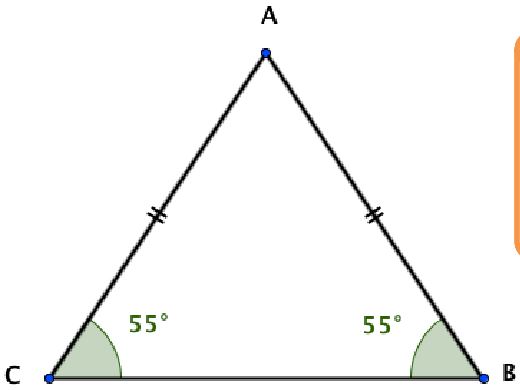
## 2.2. Selon les angles

| Noms | Caractéristiques | Exemples |
|---|---|---|
| Triangle **acutangle** | 3 angles aigus |  |
| Triangle **obtusangle** | 1 angle obtus<br>(2 angles aigus) |  |
| Triangle **rectangle** | 1 angle droit<br>(2 angles aigus) |  |

Le triangle BAC dont les côtés $[BA]$ **et** $[CA]$ ont la même mesure est appelé le triangle **isocèle de sommet A.**

## 3. Les angles des triangles particuliers

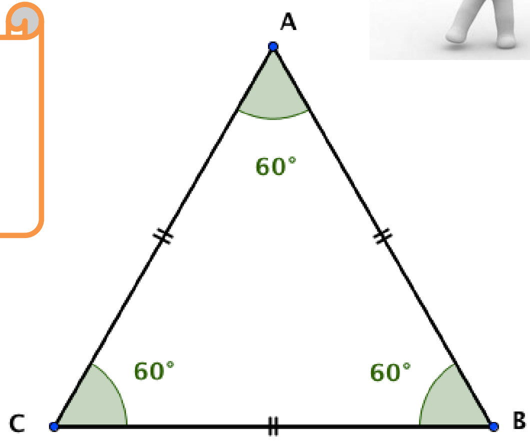
### 3.1. Le triangle isocèle



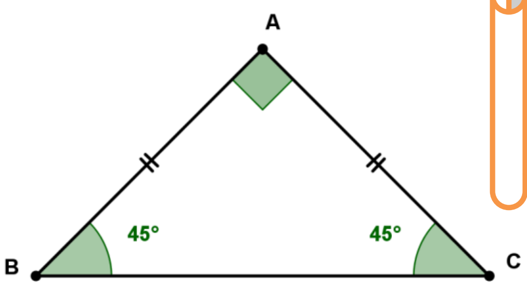

❖ Les **angles** à la **base** d'un triangle isocèle ont la **même amplitude**.
Si ABC est un triangle isocèle de sommet A, alors $|\widehat{B}| = |\widehat{C}|$

### 3.2. Le triangle équilatéral

❖ Les **angles d'un triangle équilatéral valent tous 60°**.
Si ABC est un triangle équilatéral, alors $|\widehat{A}| = |\widehat{B}| = |\widehat{C}| = 60°$




### 3.3. Le triangle isocèle rectangle



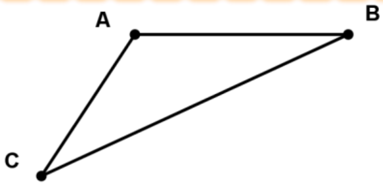

❖ Les **angles à la base d'un triangle isocèle rectangle valent 45°**.
Si ABC est un triangle isocèle rectangle en A, alors $|\widehat{B}| = |\widehat{C}| = 45°$

La **somme** des **amplitudes** des **angles intérieurs** d'un triangle vaut **180°**.

## 4. La construction de triangles

Un **sommet** d'un triangle est **opposé** à un côté s'il **n'appartient pas** à ce **côté**.
Un **angle** d'un triangle est **adjacent** à un côté si ce côté est un des **côtés de l'angle**.

Exemple :

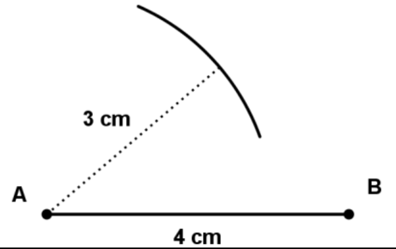
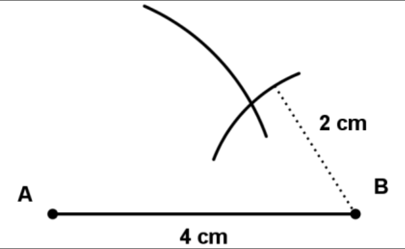
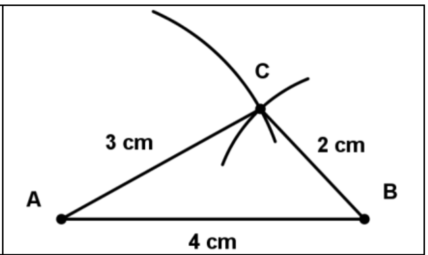



Le sommet B est **opposé** au côté [AC].

L'angle $\hat{A}$ est **adjacent** aux côtés [AC] et [AB].

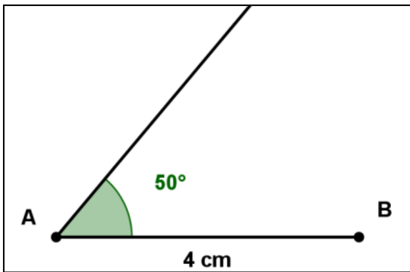
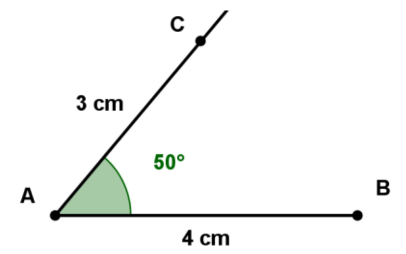
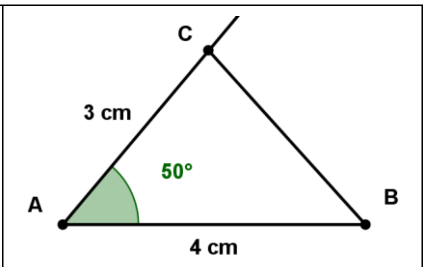
### 4.1. Avec la longueur des trois côtés

Données : $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{AC}$ = 3 cm et $\overline{BC}$ = 2 cm.

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| On **trace** [AB].<br><br>On **trace** un **arc** de cercle de **centre A** et de 3 cm ($\overline{AC}$) de rayon. | On **trace** un second **arc** de cercle de **centre B** et de rayon 2 cm ($\overline{BC}$) qui **coupe** le premier. | On place le **point C** à **l'intersection** des 2 arcs de cercle.<br><br>On **relie** le point C aux points A et B. |

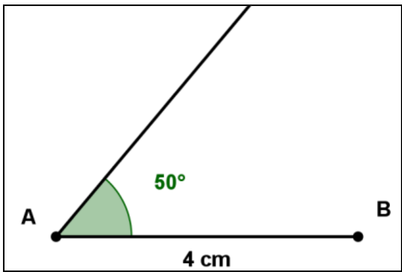
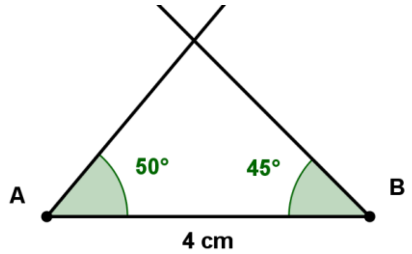
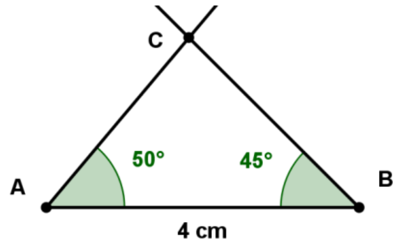
### 4.2. Avec la longueur de deux côtés et l'amplitude de l'angle compris entre ceux-ci

Données : $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{AC}$ = 3 cm et $|\widehat{A}|$ = 50°.

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| On **trace** [AB].<br><br>On **trace** un angle de 50° et de sommet A sur le côté [AB]. | On **place** le **point C**, sur le deuxième coté de l'angle, à 3 cm de A. | On **relie** les points C et B. |

### 4.3. Avec la longueur d'un côté et l'amplitude des angles adjacents à celui-ci

Données : $\overline{AB}$ = 4 cm, $|\widehat{A}|$ = 50° et $|\widehat{B}|$ = 30°

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| On **trace** [AB].<br><br>On **trace** un angle de 50° et de **sommet A** sur le côté [AB]. | On **trace** un angle de 30° et de **sommet B** sur le côté [AB]. | On **place** le **point C** à **l'intersection** des 2 demi-droites. |

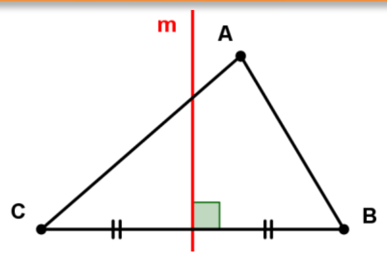
## 5. Les droites remarquables d'un triangle

### 5.1. Médiatrices d'un triangle

Une **médiatrice** d'un triangle est la médiatrice d'un de ses côtés, c'est – à – dire la **droite perpendiculaire** à ce côté en son **milieu**.
Chaque triangle possède **3 médiatrices**.

Exemple :

**m** est la **médiatrice** du côté [CB].

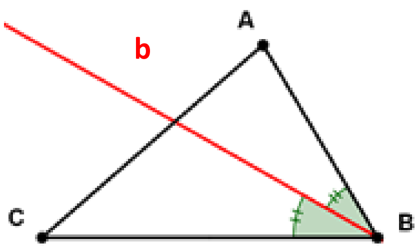



### 5.2. Bissectrices d'un triangle

Une **bissectrice** d'un triangle est la bissectrice d'un de ses angles, c'est – à – dire la **demi – droite issue** du **sommet** de l'angle et qui coupe celui – ci en **deux angles** de **même amplitude**.
Chaque triangle possède **3 bissectrices**.

Exemple :

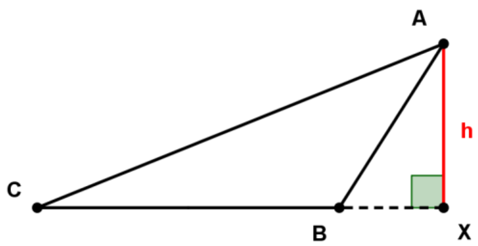
**b** est la **bissectrice** de l'angle $\hat{B}$.

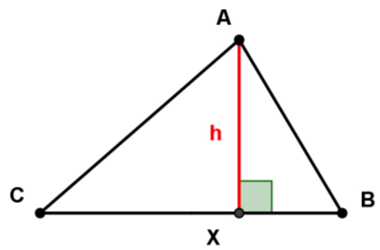


## 5.3. Hauteurs d'un triangle

Une **hauteur** d'un triangle est un **segment** de droite **issu** d'un **sommet perpendiculairement** au **côté opposé** ou à son **prolongement**.
Chaque triangle possède **3 hauteurs**.

Exemple :



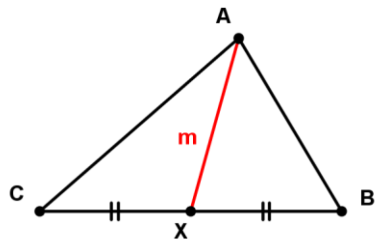

**h** est la **hauteur issue** du sommet A.

## 5.4. Médianes d'un triangle

Une **médiane** d'un triangle est un **segment** de droite qui joint le **milieu** d'un **côté** au **sommet opposé**.
Chaque triangle possède **3 médianes**.

Exemple :

**m** est la **médiane issue** de A.
ou **relative** au côté [CB]




Si dans un triangle, une **hauteur** est en même temps une **médiatrice** d'un côté, alors le **triangle** est **isocèle**.
Si dans un triangle, une **hauteur contient** un **côté**, alors le **triangle** est **rectangle**.

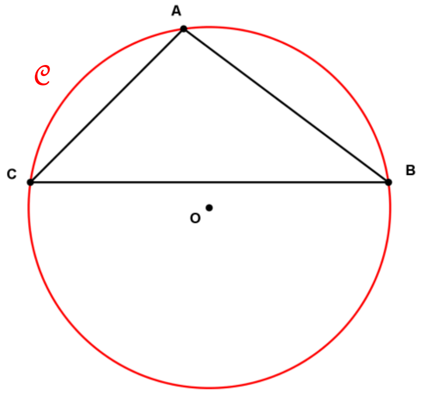
# 6. Le cercle circonscrit à un triangle

## 6.1. Définition

Le cercle **circonscrit** à un triangle est le **cercle** qui **passe** par les **trois sommets** de ce triangle.

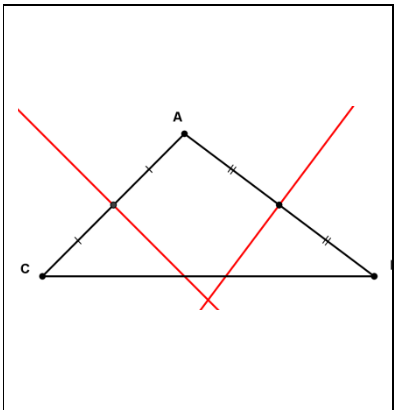
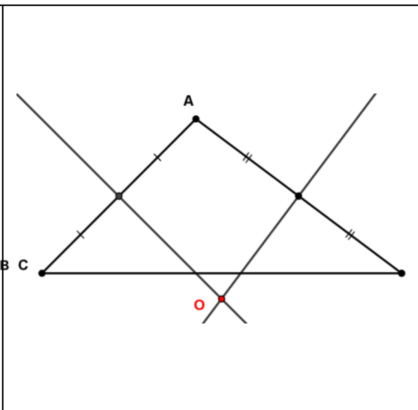
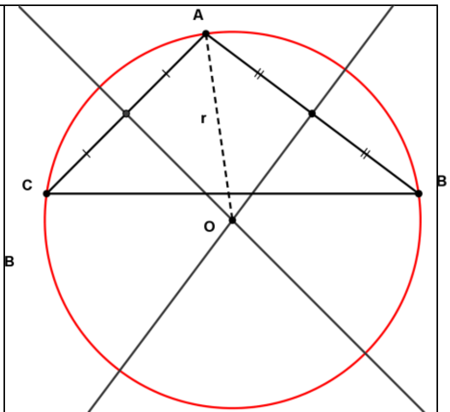
Exemple :

$\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.




## 6.2. La construction du cercle circonscrit à un triangle

Soit un triangle ABC.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| On **trace** les **médiatrices** de **deux** des côtés du triangle. | On **place** le point **O** à **l'intersection** des 2 médiatrices. | On **trace** le cercle de **centre O** et de **rayon** $\overline{OA}$. |

❖ Le **centre** du **cercle circonscrit** à un triangle est **l'intersection** des **médiatrices** de celui – ci.

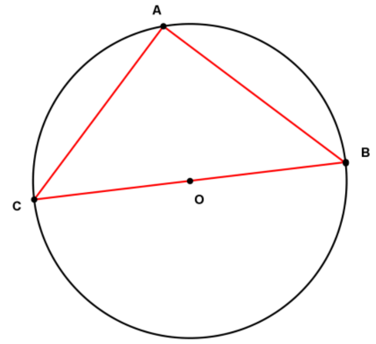
## 6.3. Le triangle inscrit dans un demi – cercle

### 6.3.1. Définition

Un **triangle inscrit dans un demi – cercle** est un triangle dont **un** des **côtés** est un **diamètre** du cercle et dont les **deux autres côtés** sont des **cordes** du cercle.

Exemple :

Le triangle ABC est inscrit dans un demi – cercle.

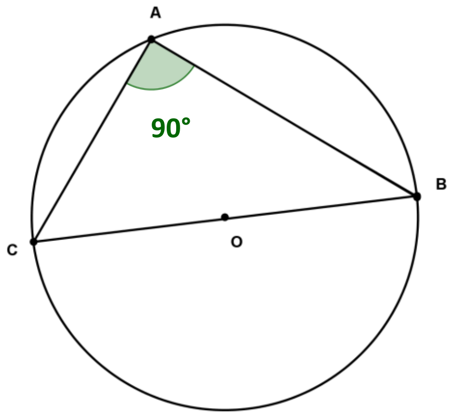



### 6.3.2. Les propriétés

❖ Tout **triangle inscrit** dans un **demi – cercle** est **rectangle**.

Exemple :

Le triangle ABC est inscrit dans un **demi** – **cercle** et est **rectangle en A**.

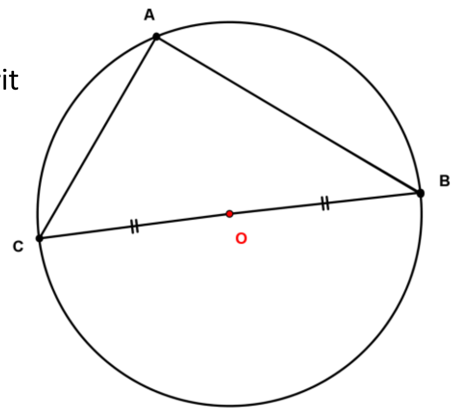



❖ Le **centre** du **cercle circonscrit** à un **triangle rectangle** est le **milieu** de son **hypoténuse**.

Exemple :

Le **point O** est le **centre** du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le **point O** est le **milieu** de [CB].



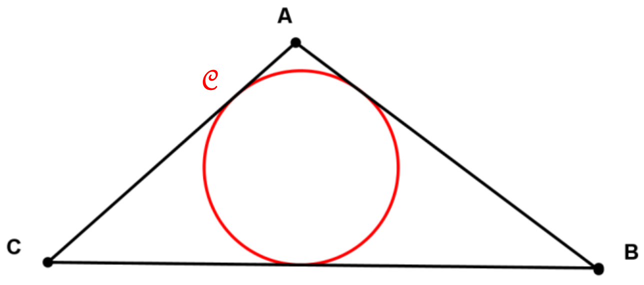
## 7. Le cercle inscrit à un triangle

### 7.1. Définition

Le cercle **inscrit** à un triangle est le **cercle** qui est **tangent** aux **trois côtés** de ce triangle.

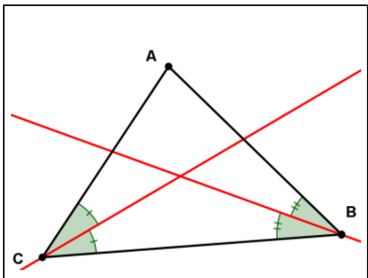
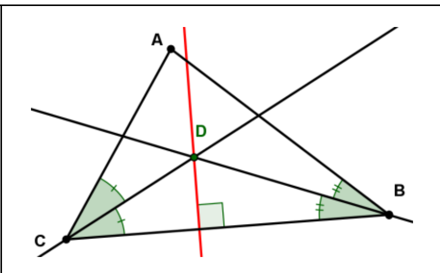
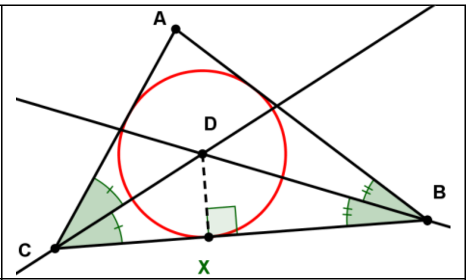
Exemple :

$\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle ABC.




### 7.2. La construction du cercle inscrit à un triangle

Soit un triangle ABC,

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| On **trace** les **bissectrices** de **deux** des angles du triangle. | On place le point D à l'intersection des deux bissectrices.<br>On trace la perpendiculaire à un côté passant par D. | On place le point X à l'intersection de la perpendiculaire et du côté.<br>On **trace** le cercle de **centre D** et de **rayon $\overline{DX}$**. |

❖ Le **centre** du **cercle inscrit** à un triangle est **l'intersection** des **bissectrices** des angles de celui – ci.

## 8. L'inégalité triangulaire

### 8.1. La propriété

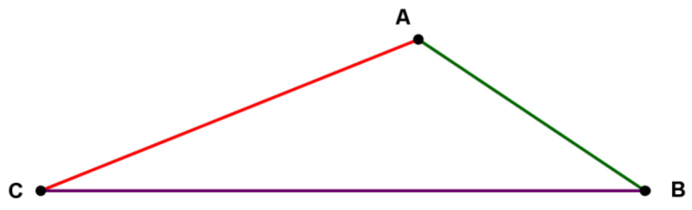
❖ Dans un triangle, la **longueur** de **chaque côté** est **comprise** entre la **somme** et la **différence** positive et la somme des **longueurs** des deux **autres côtés**.

Exemple :

$|\overline{AC} - \overline{BC}| < \boldsymbol{\overline{AB}} < \overline{AC} + \overline{BC}$

$|\overline{AB} - \overline{BC}| < \boldsymbol{\overline{AC}} < \overline{AB} + \overline{BC}$

$|\overline{AB} - \overline{AC}| < \boldsymbol{\overline{BC}} < \overline{AB} + \overline{AC}$




### 8.2. La construction possible d'un triangle

Pour vérifier s'il est **possible** de **construire** un **triangle** dont les longueurs sont données, on vérifie si la **longueur** du plus **grand côté** est plus **petite** que la **somme** des longueurs des deux **autres côtés**.

Exemple : Soit les longueurs données : 3,5 cm, 4,5 cm et 2 cm.

Le plus grand côté mesure 4,5 cm et 4,5 cm < 3,5 cm + 2 cm

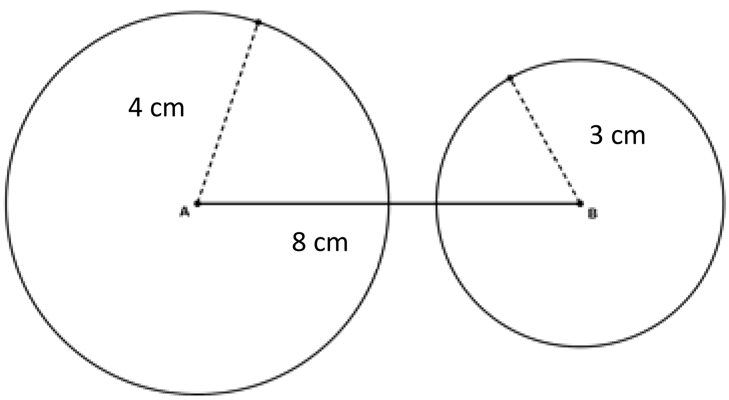
4,5 cm < 5,5 cm

Donc **on sait construire** le triangle dont les côtés mesurent 3,5 cm, 4,5 cm et 2 cm.

Contre - exemple : Soit les longueurs données : 4 cm, 8 cm et 3 cm.

Le plus grand côté mesure 8 cm et 8 cm > 4 cm + 3 cm

8 cm > 7 cm



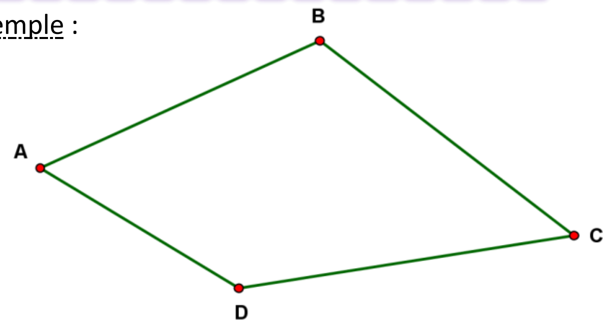

La construction du triangle dont les côtés mesurent 8 cm, 4 cm et 3 cm est **impossible !**

# Les quadrilatères

## 1. Définition

Un **quadrilatère** est un **polygone** à **4** côtés.

Exemple :




A, B, C et D sont appelés les **sommets** du quadrilatère.

**[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]** sont appelés les **côtés** du quadrilatère.

### 1.1. Les côtés

Deux **côtés** d'un quadrilatère qui ont un **sommet commun** sont **adjacents** ou **consécutifs**.

Deux **côtés** d'un quadrilatère qui n'ont **pas** de **sommet commun** sont **opposés**.

Exemple :

Dans le quadrilatère ABCD,

les côtés **[AB]** et **[BC]** sont **adjacents** et les côtés **[BC]** et **[AD]** sont **opposés**.

### 1.2. Les sommets

Deux **sommets** d'un quadrilatère qui **définissent** un **côté** sont **consécutifs**.

Deux **sommets** d'un quadrilatère qui **ne définissent pas** un **côté** sont **opposés**.

Exemple :

Dans le quadrilatère ABCD,

les sommets **A** et **D** sont **consécutifs** et les sommets **A** et **C** sont **opposés**.

### 1.3. Les angles

Deux **angles** d'un quadrilatère qui **possèdent** un **côté commun** sont **consécutifs**.

Deux **angles** d'un quadrilatère qui ne **possèdent pas** un **côté commun** sont **opposés**.

Exemple :

Dans le quadrilatère ABCD,

les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont consécutifs et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont opposés.

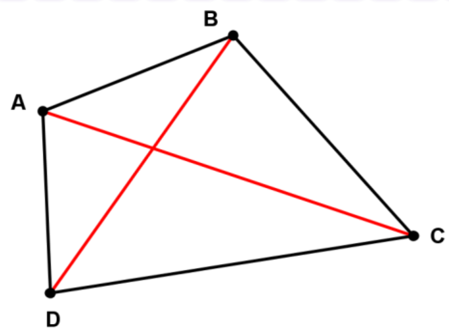
## 2. Les médianes et diagonales d'un quadrilatère

### 2.1. Les diagonales

Une **diagonale** d'un quadrilatère est un **segment** de **droite** qui joint deux **sommets opposés** de ce quadrilatère.

Exemples :

Les segments de droites [AC] et [BD] sont les diagonales du quadrilatère ABCD.

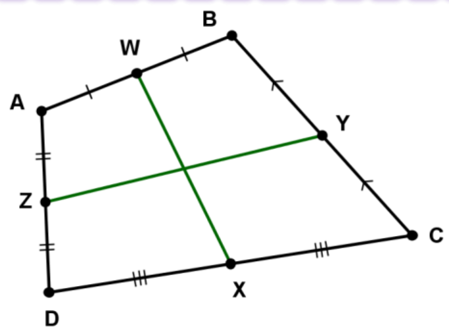



### 2.2. Les médianes

Une **médiane** d'un quadrilatère est un **segment** de **droite** qui joint les **milieux** de **deux côtés opposés**.

Exemples :

Les segments de droites [WX] et [YZ] sont les médianes du quadrilatère ABCD.



## 3. Les définitions des quadrilatères particuliers

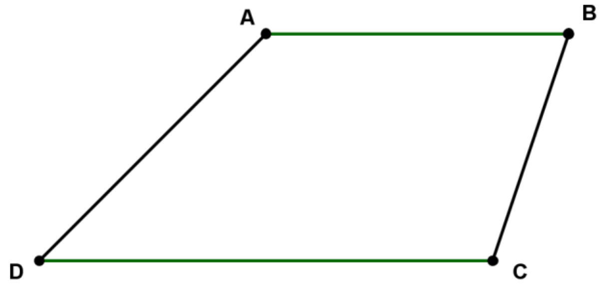
### 3.1. Le trapèze

Un **trapèze** est un **quadrilatère** qui possède **deux côtés parallèles**.

Exemple :

Les côtés **[AB]** et **[CD]** sont **parallèles**.

Codage mathématique : **AB // CD**



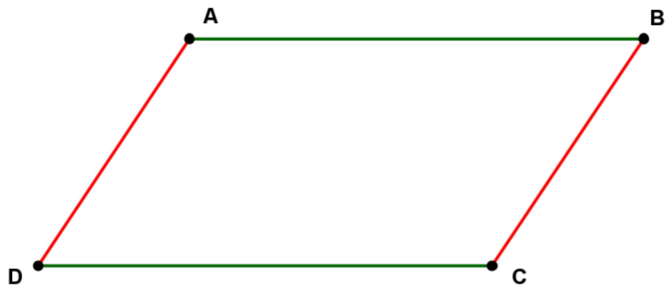

### 3.2. Le parallélogramme

Un **parallélogramme** est un **quadrilatère** dont les **côtés** sont **parallèles deux** à **deux**.

Exemple :

Les côtés **[AB]** et **[CD]** sont **parallèles** et
les côtés **[AD]** et **[BC]** sont **parallèles.**

Codage mathématique :
**AB // CD** et **AB // BC**



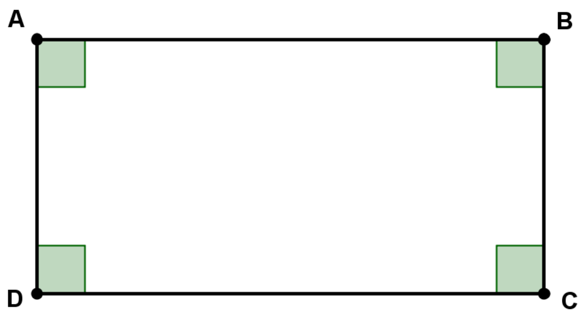

### 3.3. Le rectangle

Un **rectangle** est un **quadrilatère** qui possède **quatre angles droits**.

Exemple :

Les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ ont tous une amplitude de 90°.

Codage mathématique : $|\widehat{A}| = |\widehat{B}| = |\widehat{C}| = |\widehat{D}| = 90°$



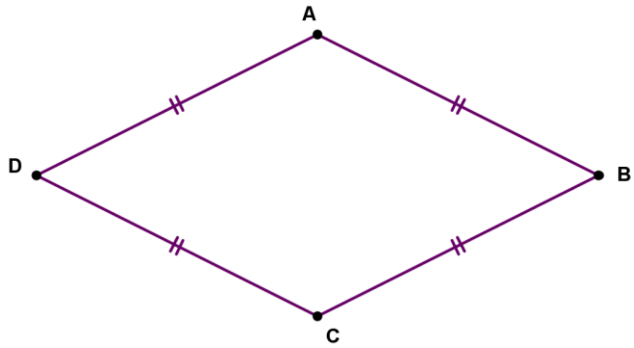
## 3.4. Le losange

Un **losange** est un **quadrilatère** qui possède **quatre côtés isométriques**.

Exemple :

Les côtés **[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]**
ont la **même longueur**.

Codage mathématique : $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$




## 3.5. Le carré

Un **carré** est un **quadrilatère** qui possède **quatre angles droits et quatre côtés isométriques**.

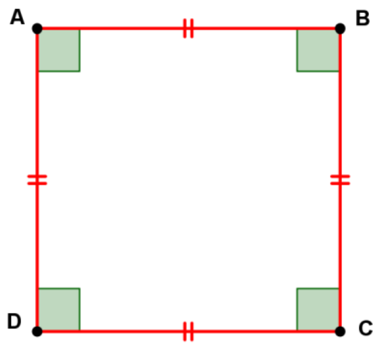
Exemple :

Les côtés **[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]**
ont la **même longueur**.

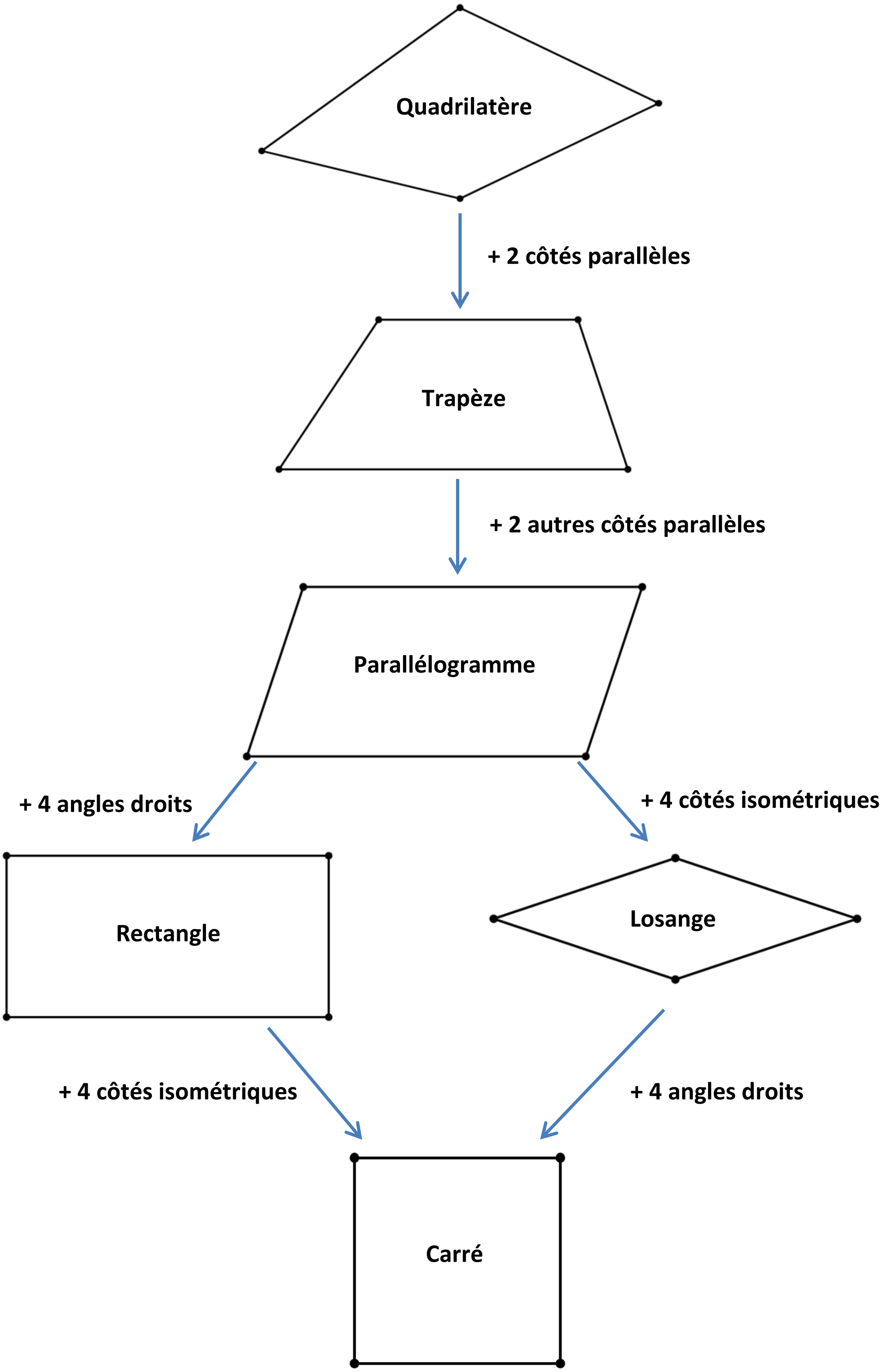
Les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ ont tous une amplitude de 90°.

Codage mathématique : $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

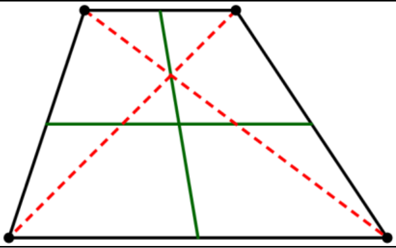
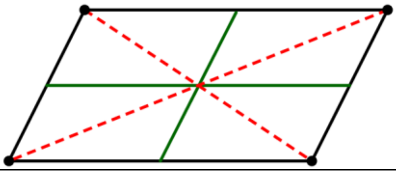
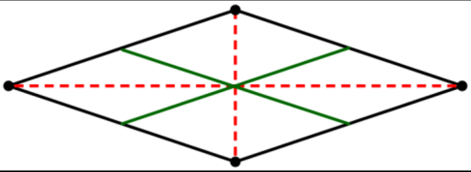
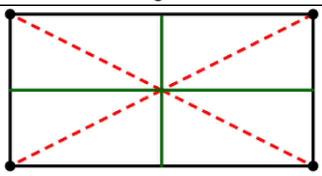
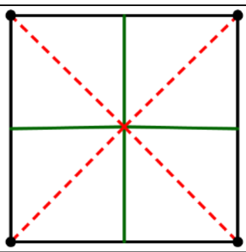
et $|\widehat{A}| = |\widehat{B}| = |\widehat{C}| = |\widehat{D}| = 90°$



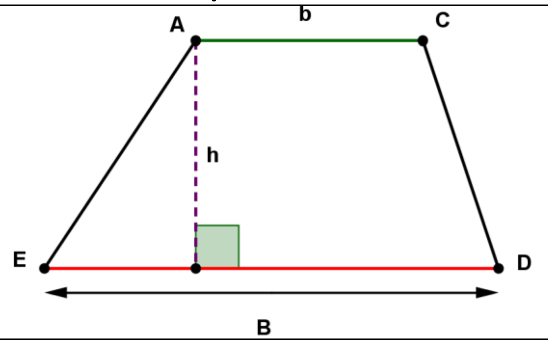
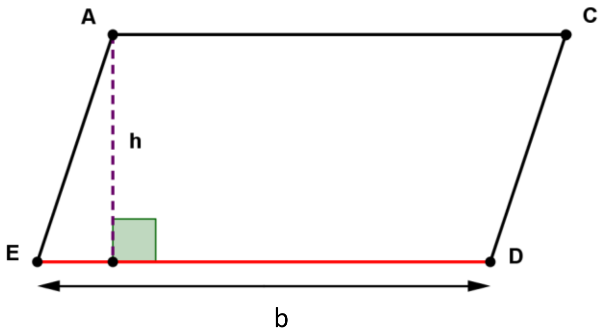
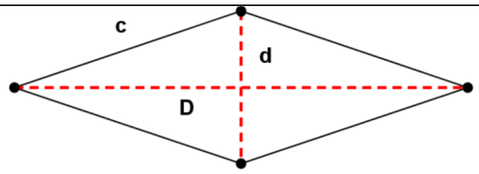
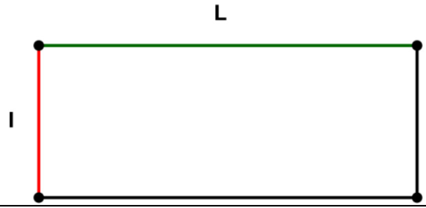
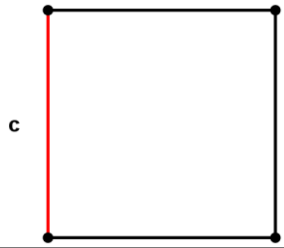

## 4. L'organigramme selon les côtés et les angles



## 5. Les diagonales et médianes des quadrilatères particuliers

|  | Médianes | | | | Diagonales | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sont de même longueur | Se coupent en leur milieu | Sont perpendiculaires | Sont de même longueur que les côtés | Sont de même longueur | Se coupent en leur milieu | Sont perpendiculaires |
|  | | X | | | | | |
|  | | X | | X | | X | |
|  | X | X | | X | | X | X |
|  | | X | X | X | X | X | |
|  | X | X | X | X | X | X | X |

## 6. Les formules de périmètre et d'aire

| Périmètre | Aire | Représentation |
|---|---|---|
| P = $\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}$ | A = $\frac{(B+b).h}{2}$ |  |
| P = 2 $(\overline{AC}+\overline{CD})$ | A = **b** . **h** |  |
| P = 4c | A = D . d |  |
| P = 2 . (**L** + **l**) | A = **L** . **l** |  |
| P = 4**c** | A = **c**$^2$ |  |

## 7. Les méthodes pour identifier les quadrilatères

### 7.1. Le parallélogramme

Pour déterminer si un quadrilatère est un parallélogramme, il suffit de vérifier :

- ❖ qu'il admet un centre de symétrie ;
- ❖ que ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- ❖ qu'il possède les côtés opposés parallèles ;
- ❖ qu'il possède les côtés opposés de même longueur ;
- ❖ qu'il possède les angles opposés de même amplitude.

### 7.2. Le rectangle

Pour déterminer si un quadrilatère est un rectangle, il suffit de vérifier :

- ❖ qu'il possède quatre angles droits ;
- ❖ que ses médianes sont axes de symétrie ;
- ❖ que ses diagonales se coupent en leur milieu et sont isométriques.

### 7.3. Le losange

Pour déterminer si un quadrilatère est un losange, il suffit de vérifier :

- ❖ qu'il possède quatre côtés de même longueur ;
- ❖ que ses diagonales sont axes de symétrie ;
- ❖ que ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

### 7.4. Le carré

Pour déterminer si un quadrilatère est un carré, il suffit de vérifier :

- ❖ qu'il possède quatre côtés de même longueur et quatre angles droits ;
- ❖ que ses diagonales et ses médianes sont axes de symétrie ;
- ❖ que ses diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et sont isométriques ;
- ❖ qu'il existe une rotation de 90° qui applique le quadrilatère sur lui – même.

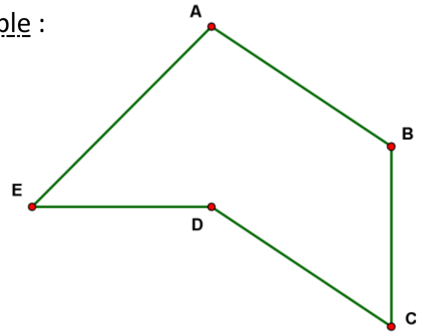
# Les polygones

## 1. Définition

### 1.1. Définition

Un **polygone** est une **figure plane** à plusieurs côtés.

Exemple :




ABCDE est un polygone à 5 côtés.

Les points **A**, **B**, **C**, **D** et **E** sont les **sommets** du polygone.

Les segments de droite **[AB]**, **[BC]**, **[CD]**, **[DE]** et **[EA]** sont les côtés du **polygone**.

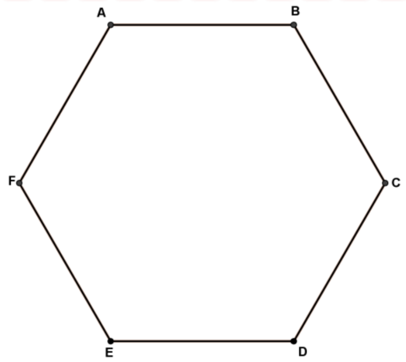
Un polygone se nomme en citant ses **sommets** dans le sens **horloger**.

| Nombre de côtés du polygone | Nom du polygone |
|---|---|
| **3 côtés** | Triangle |
| **4 côtés** | Quadrilatère |
| **5 côtés** | Pentagone |
| **6 côtés** | Hexagone |
| **7 côtés** | Heptagone |
| **8 côtés** | Octogone |
| **10 côtés** | Décagone |
| **12 côtés** | Dodécagone |

### 1.2. Les polygones réguliers

Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la **même longueur** et tous les angles ont la **même amplitude**.

Exemple : ABCDEF est un hexagone régulier.



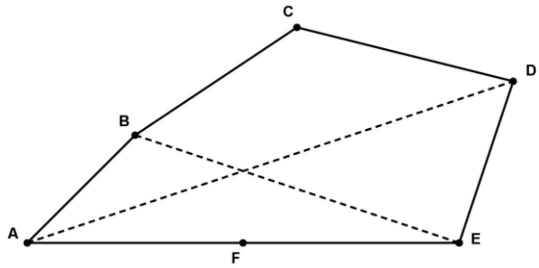
## 2. Les polygones convexes et concaves

### 2.1. Les polygones convexes

Un **polygone** est **convexe** si, toutes ses **diagonales** sont **incluses** à **l'intérieur** de ce polygone.

Exemple :

ABCDE est un polygone **convexe**.

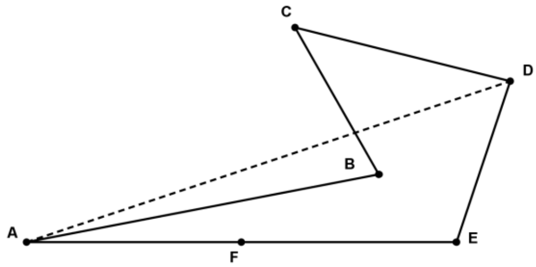



### 2.2. Les polygones concaves

Un **polygone** est **concave** s'il existe au moins une de ses **diagonales** qui n'est **pas incluse** entièrement à **l'intérieur** de ce polygone.

Exemple :

ABCDE est un polygone **concave**.



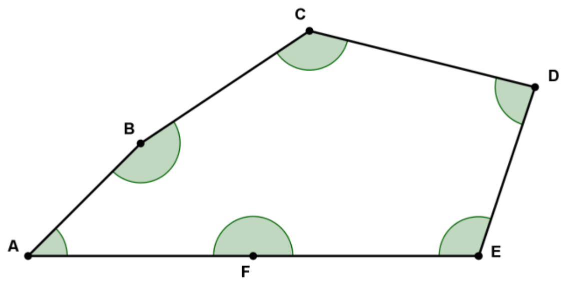

## 3. La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone

La **somme** des **amplitudes** des **angles intérieurs** d'un polygone à n côtés vaut : **(n – 2) . 180°**

Exemple :

La somme des amplitudes des angles intérieurs du polygone ABCDEF vaut :

**(6 – 2) . 180° = 4 . 180° = 720°**



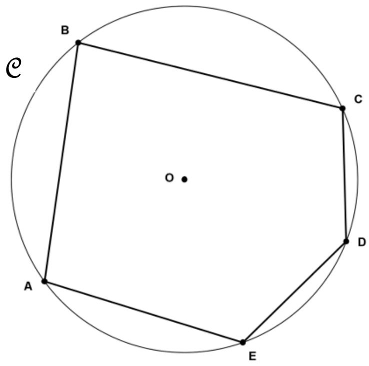
## 4. Les polygones inscrits dans un cercle

### 4.1. Définition

Un **polygone** est **inscrit** dans un cercle si tous ses **sommets appartiennent** au cercle.

Exemple :

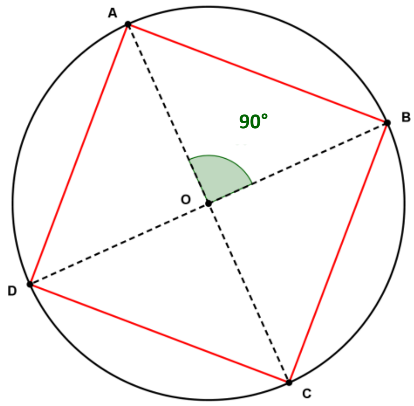
Le polygone ABCDE est **inscrit** au cercle $\mathcal{C}_{(O,\,r)}$.




### 1.1. Des polygones réguliers faciles à construire dans un cercle

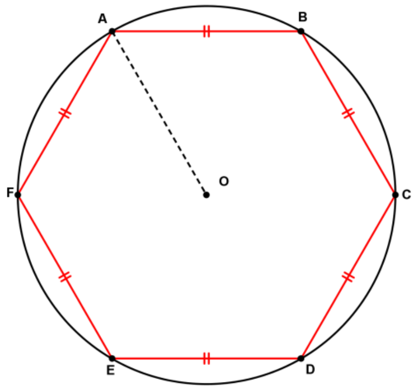
- Le carré

On trace deux diamètres perpendiculaires.



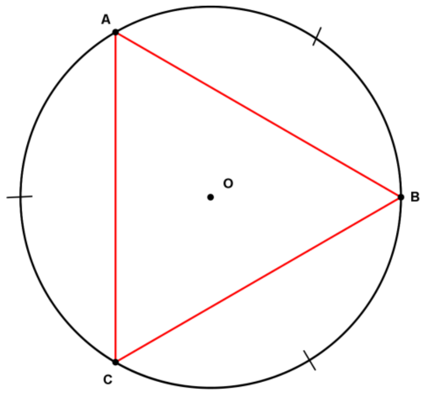

- L'hexagone régulier

On reporte 6 fois la longueur du rayon sur le cercle.



- Le triangle équilatéral

On reporte 6 fois la longueur du rayon sur le cercle.
On relie un point sur deux.

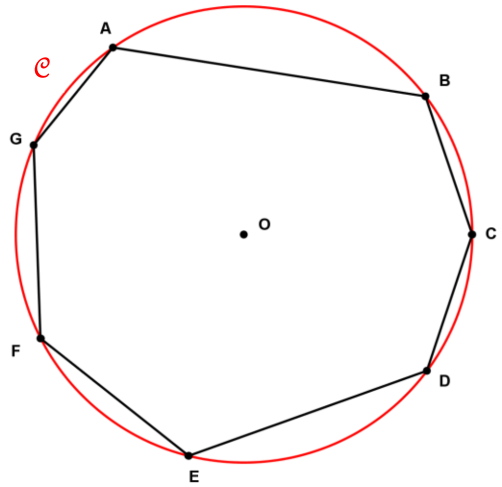



## 5. Le cercle circonscrit à un polygone

Un **cercle** est **circonscrit** à un polygone si le cercle **comprend** tous les **sommets** du polygone.

Exemple :

Le cercle $\mathcal{C}$ est **circonscrit** au polygone ABCDEFG.

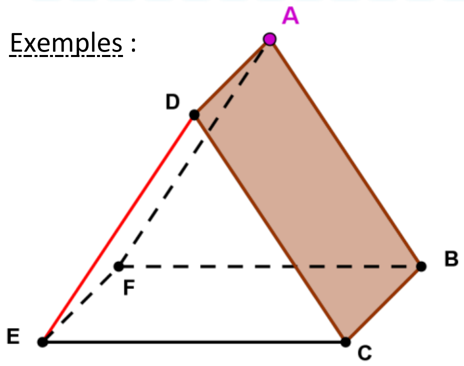


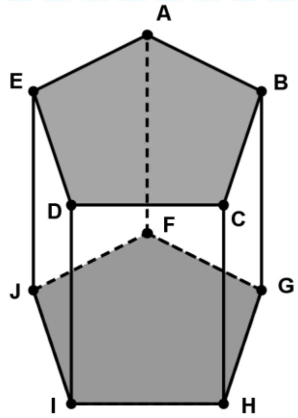

# Les solides

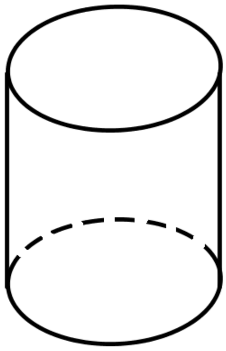
## 1. Définitions

- ✓ Un solide est un polyèdre si **toutes ses faces sont des polygones**.
- ✓ Un solide est un **non polyèdre** (**corps rond**) dans le cas contraire.

Exemples :



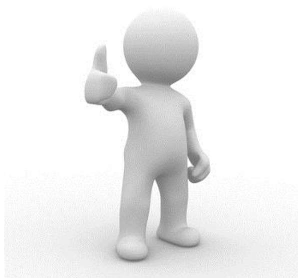



Les solides ABCDEF et ABCDEFGHIJ sont des **polyèdres**.
Quelques non polyèdres courants : **le cône**, **le cylindre** (3$^{e}$ solide), **la sphère.**

Dans le solide **ABCDEF** :

- le segment de droite **[DE]** est une **arête**,
- le rectangle **ABCD** est une **face**,
- le point **A** est un **sommet**.



Dans le solide **ABCDEFGHIJ** :

- Les pentagones ABCDE et FGHIJ sont appelés les **bases**,
- Les polygones ABFG, AFJE, EDIJ, DCHI et CBGH sont appelés les **faces latérales**.

Chaque polyèdre comporte au moins 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes.

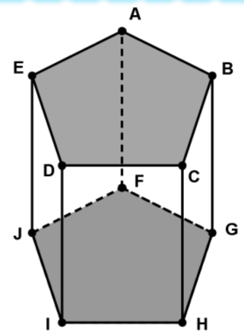
## 2. La classification des polyèdres

### 2.1. Le prisme (droit)

Un **prisme (droit)** est un polyèdre qui possède **deux bases parallèles** et **isométriques** et des **faces latérales rectangulaires** et **perpendiculaires** aux bases.

Exemple :

Le polyèdre ABCDEFGHIJ est un **prisme droit** car :
- ses **deux** bases ABCDE et FGHIJ sont **parallèles** et **isométriques**,
- ses faces latérales ABFG, AFJE, EDIJ, DCHI et CBGH sont des **rectangles et perpendiculaires aux bases.**

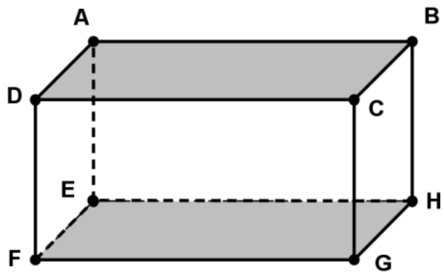



#### 1.1.1. Le parallélépipède rectangle

Le **parallélépipède rectangle** est un prisme droit composé de 6 faces rectangulaires.

Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle ABDCEFGH.



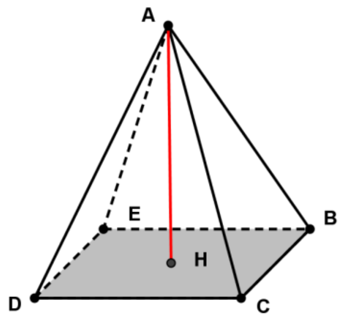

### 2.2. La pyramide (droite)

Une **pyramide (droite)** est un polyèdre ayant **une base unique** et dont les **faces latérales** sont des **triangles isocèles.**

Exemple :

Le polyèdre ABCDE est une **pyramide** car :
- il possède **une** base BCDE,
- ses faces latérales ABC, ACD, ADE et AEB sont des **triangles isocèles**,
- il possède un sommet A.

Le segment de droite **[AH] perpendiculaire** à la **base** et passant par le **sommet** est appelé la **hauteur** de la pyramide.



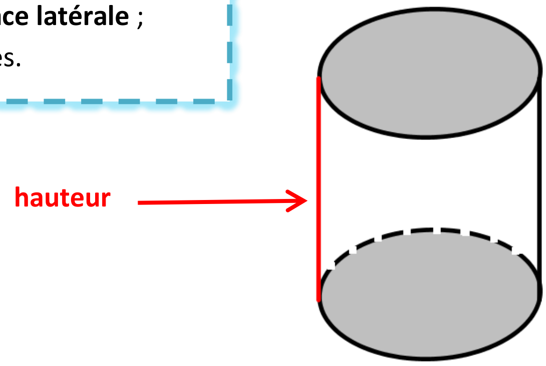
## 3. La classification des non polyèdres (corps ronds)

### 3.1. Le cylindre (droit)

Un **cylindre (droit)** est un **non polyèdre** limité par :
- deux **disques parallèles** et de même rayon : les **bases** ;
- une portion de surface courbe : la **surface latérale** ;

et dont la hauteur est **perpendiculaire** aux bases.

Exemple :



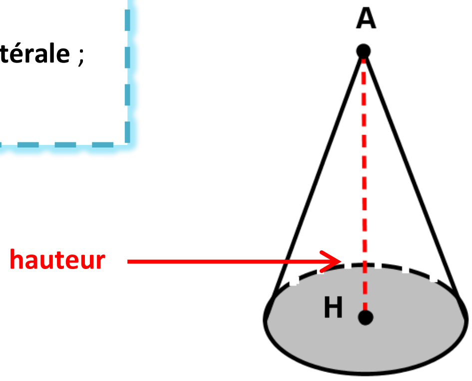

### 3.2. Le cône (droit)

Un **cône (droit)** est un **non polyèdre** limité par :
- un **disque**: la **base** ;
- une portion de surface courbe : la **surface latérale** ;

et dont la hauteur passe par le **centre** de la base.

Exemple :

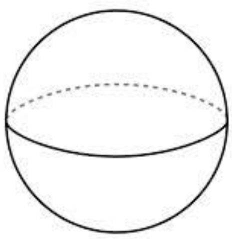
Le cône possède **un** seul **sommet** situé à l'opposé de sa base.




### 3.3. La sphère

Une **sphère** est un **non polyèdre** qui ne possède pas de

Exemple :

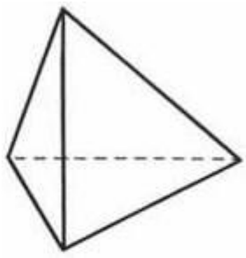


## 4. Les polyèdres réguliers (de Platon)

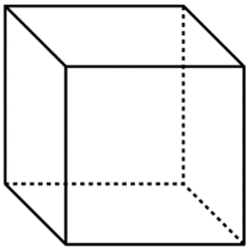
Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont **toutes** les **faces** sont **identiques** et pour lequel il concoure un **même nombre d'arêtes** en chaque **sommet**.

Exemples :

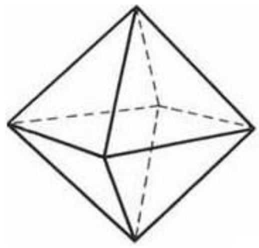
**Le tétraèdre**



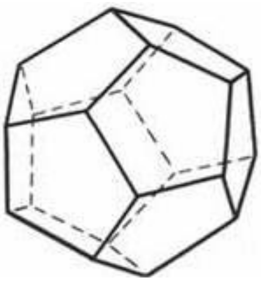
**Le cube**



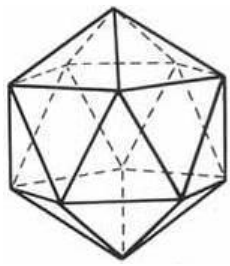
**L'octaèdre**



**Le dodécaèdre**



**L'icosaèdre**

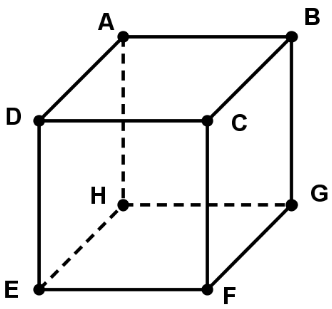


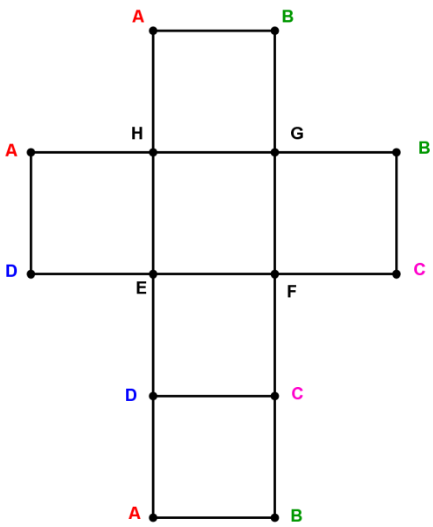
## 5. Les développements de prismes droits

Le **développement (ou patron)** d'un prisme droit est la mise à **plat** de sa **surface extérieure**, en **un** seul **morceau**.

### 5.1. Le cube

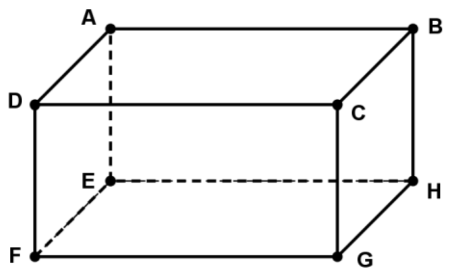
Soit le cube ABCDEFGH et un de ses développements.

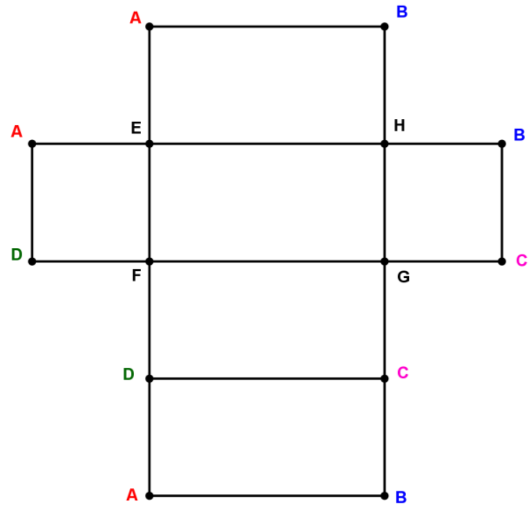


## 5.2. Le parallélépipède rectangle à base carrée

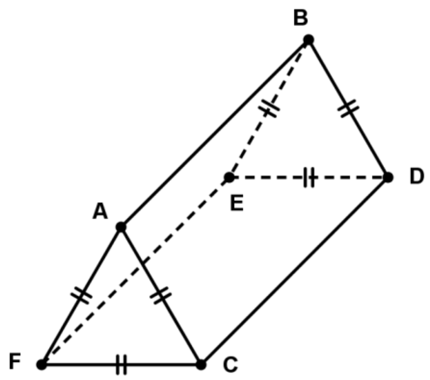
Soit le parallélépipède rectangle à base carrée ABCDEFGH et un de ses développements.

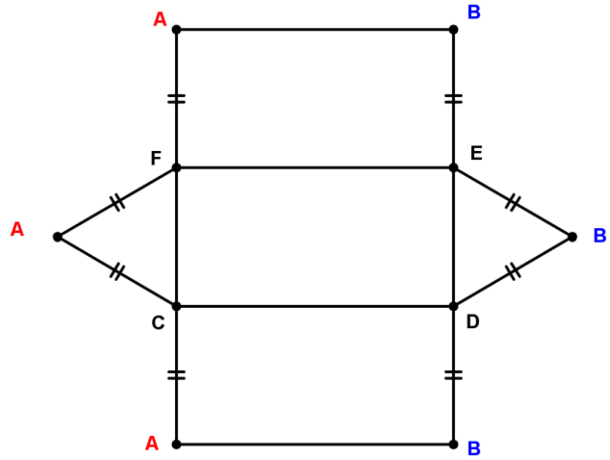



## 5.3. Le prisme droit à bases triangulaires

Soit le prisme droit à bases triangulaires ABCDEF et un de ses développements




En règle générale, les solides possèdent **plus d'un** développement.

## 6. La perspective cavalière

### 6.1. Définition et propriété

La **perspective cavalière** est une technique de dessin qui permet de **représenter** en **deux dimensions** un **solide**.

En perspective cavalière, les **droites parallèles** en **réalité** restent parallèles sur le **dessin**.

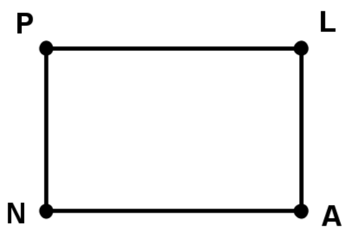
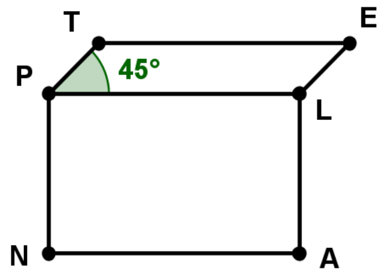
### 6.2. La construction d'un parallélépipède rectangle en perspective cavalière

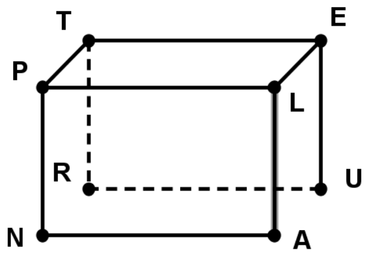
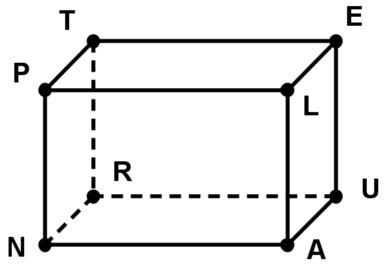
En perspective cavalière, tu dois respecter les **règles** suivantes :

- Les **arêtes cachées** sont représentées en **pointillés**.
- **L'angle** de la perspective est de **45°**.
- Les **arêtes** de la **profondeur** sont représentées en **longueur réduite** grâce au calcul suivant : **longueur réelle . 0,7 = longueur réduite**

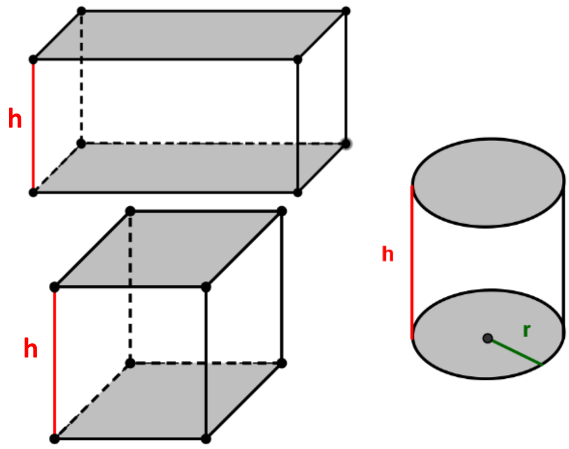
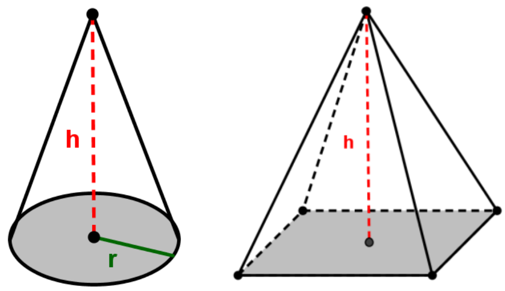
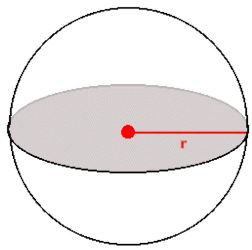
Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle PLANTEUR (L = 2,5 cm, l = 1 cm, h = 1,6 cm) à dessiner en perspective cavalière.

| Première étape | Deuxième étape |
|---|---|
| <br>On trace le rectangle PLAN.<br>[NA] est une longueur et [PN] une hauteur.<br><br>**La longueur et la hauteur sont représentées en vraie grandeur.** | <br>On trace le parallélogramme PLET tel que<br>$\lvert\widehat{TPL}\rvert$ = **45°** et $\overline{PT}$ = **0,7 . 1**<br><br>[PT] et [EL] sont des largeurs.<br><br>**La largeur est représentée en longueur réduite.**<br>**L'angle de la perspective est de 45°.** |

| Troisième étape | Quatrième étape |
|---|---|
| <br>On trace le rectangle TEUR.<br>[TR] et [RU] son tracés en pointillés. | <br>On trace [NR] et [AU].<br>[NR] sera tracé en pointillés. |

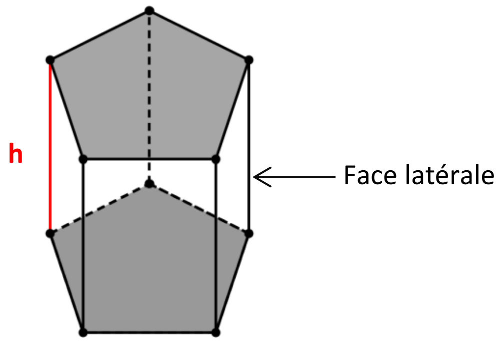
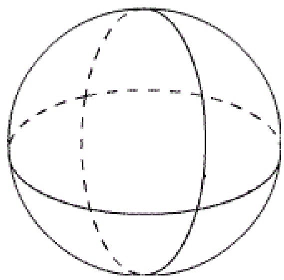
## 7. Les formules de volume

| Formules de volumes | Exemples |
|---|---|
| Les prismes et les cylindres<br><br>Volume = (aire de la base) . **hauteur** |  |
| Les pyramides et les cônes<br><br>Volume = $\frac{(\textit{aire de la base}) \,.\, \textbf{\textit{hauteur}}}{3}$ |  |
| La sphère<br><br>Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$ |  |

## 8. Les formules d’aires de solides

**L’aire latérale** d’un solide est la **somme** des **aires** des **faces latérales** de ce solide.

**L’aire totale** d’un solide est la **somme** des **aires** des **faces latérales et des bases** de ce solide.

| Formules | Exemples |
|---|---|
| Les prismes droits et les cylindres<br><br>Aire latérale = (**périmètre de la base**) . **hauteur**<br><br>Aire totale = 2 . (**aire de la base**) + aire latérale |  |
| La sphère<br>Aire d’une sphère = $\mathbf{4\,\pi\, r^2}$ |  |

Rappel : Périmètre du cercle = $\mathbf{2\,\pi\, r}$ et aire du disque = $\boldsymbol{\pi\, r^2}$

## 9. Liens entre les principaux éléments d’un prisme

| | |
|---|---|
| Un prisme droit dont la base a *n* côtés, possède :<br>• ***n* + 2** faces<br>• ***2n*** sommets<br>• ***3n*** arêtes | Exemple : Le cube possède :<br>• **4 + 2** = 6 faces<br>• **2 . 4** = 8 sommets<br>• **3 . 4** = 12 arêtes |

## 10. Formule d'Euler

Pour tout **polyèdre convexe**, nous avons la relation :

**F + S – A = 2**

- **F** est le nombre de faces
- **S** est le nombre de sommets
- **A** est le nombre d'arêtes

Exemple : Un tétraèdre possède 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes. 4 + 4 – 6 = 2

## 11. Les positions relatives

### 11.1. de deux droites

#### 11.1.1. Sécantes

Deux droites **sécantes** sont deux droites qui :

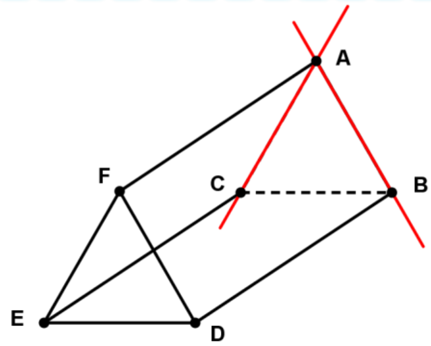
- sont situées dans un **même plan** ;
- ont **un seul** point **d'intersection**.

Exemple :

Les droites **AB** et **AC** sont **sécantes**.

Elles sont contenues dans le plan ACB

Codage mathématique : **AB ≠ AC**



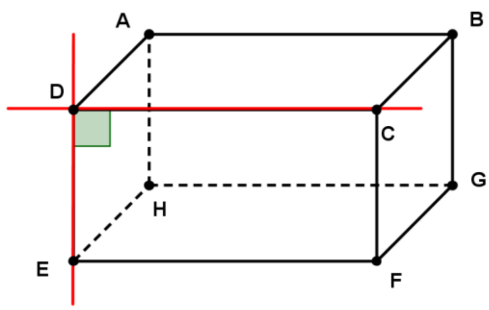

#### 11.1.2. Perpendiculaires

Deux droites **perpendiculaires** sont deux droites **sécantes** qui forment un **angle droit**.

Exemple :

Les droites **DC** et **ED** sont **perpendiculaires.**

Codage mathématique : **DC ⊥ ED**

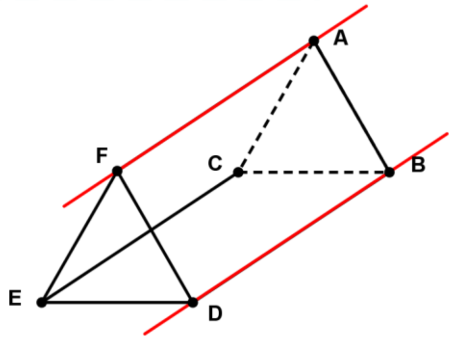


### 11.1.3. Parallèles

Deux droites **parallèles** sont deux droites qui :

- sont situées dans un **même plan** ;
- n'ont **aucun** point **d'intersection**.

Exemple :



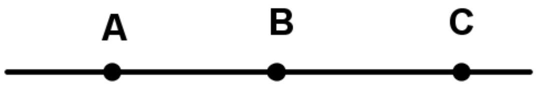

Les droites **AF** et **BD** sont **parallèles**.

Codage mathématique : **AF // BD**

### 11.1.4. Confondues

Deux droites **confondues** sont deux droites qui se **superposent**.

Exemple :




Les droites **AB** et **AC** sont **confondues**.

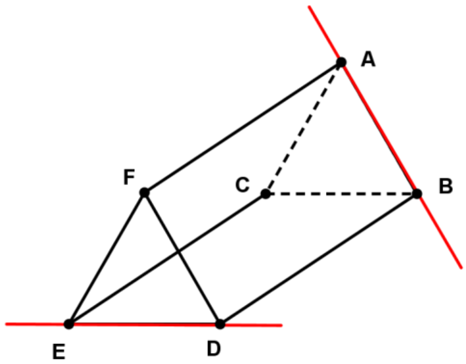
Codage mathématique : **AF // BD**

### 11.1.5. Gauches

Deux droites **gauches** sont deux droites qui :

- sont situées dans **des plans différents** ;
- n'ont **aucun** point **d'intersection**.

Exemple :




Les droites **AB** et **ED** sont **gauches**.

Codage mathématique : **AB G ED**

## 11.2. de deux plans

Un **plan** est une **surface plane illimitée** telle que toute droite joignant deux de ses points quelconques y soit incluse.

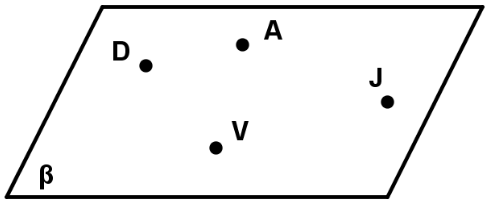
Exemple :

Un plan se note :

- soit par une **lettre grecque**,

- soit en notant **3** de ses **points non-alignés**.

Soit le plan **β** ou **DAV** ou **VAJ** ou **DVJ** ou …




❖ Par **trois points distincts non alignés**, il passe un et **un seul** plan.

Deux plans peuvent être :

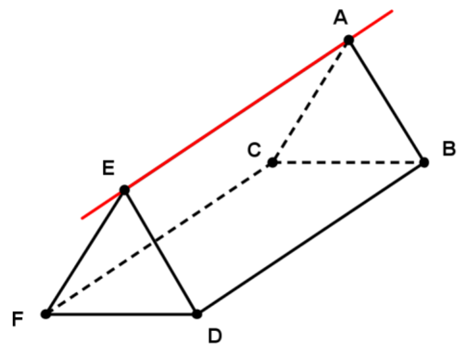
### 11.2.1. sécants

Deux plans **sécants** sont deux plans dont **l'intersection** est une **droite.**

Exemple :

Les plans **DEA** et **FEA** sont **sécants**.

Codage mathématique : **DEA** $\not\parallel$ **FEA**



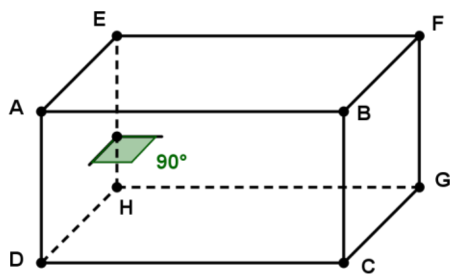

### 11.2.2. perpendiculaires

Deux plans **perpendiculaires** sont deux plans **sécants** qui forment **un angle droit**.

Exemple :

Les plans **FEH** et **AEH** sont **perpendiculaires**.

Codage mathématique : **FEH** $\perp$ **AEH**



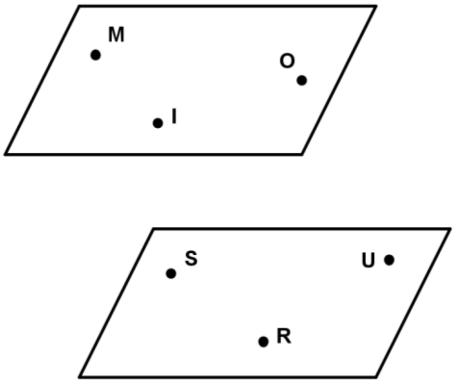
### 11.2.3. parallèles

Deux plans **parallèles distincts** sont deux plans qui n'ont **aucun point d'intersection**.

Exemple :

Les plans **MOI** et **SUR** sont **parallèles**.

Codage mathématique : **MOI // SUR**



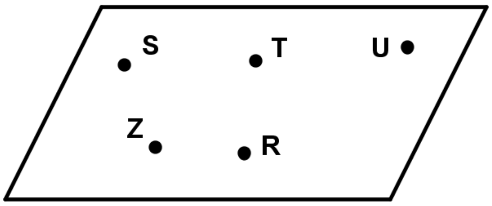

### 11.2.4. confondus

Deux plans **confondus** sont deux plans qui se **superposent**.

Exemple :

Les plans **STR** et **ZUR** sont **confondus.**

Codage mathématique : **STR // ZUR**




## 11.3. d’une droite et d’un plan

### 11.3.1. Une droite sécante à un plan

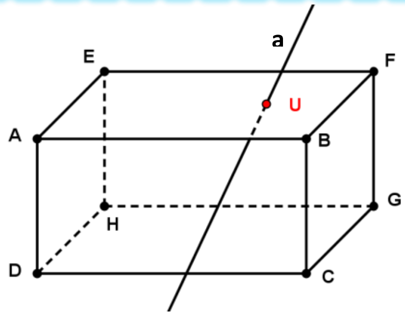
Une droite **sécante** à un plan est une droite qui a **un seul point d’intersection** avec le plan.

Exemple :

La droite **a** est **sécante** au plan **AEF**.

Codage mathématique : $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{AEF}$

$a \cap AEF = \{U\}$



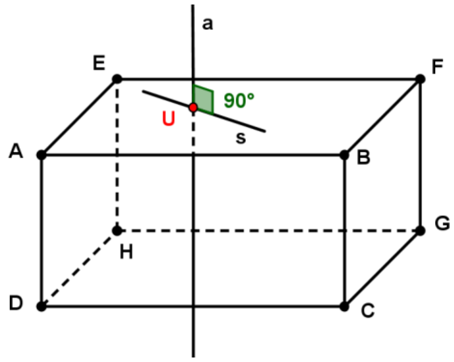

### 11.3.2. Une droite perpendiculaire à un plan

Une droite **perpendiculaire** à un plan est une droite **sécante** à ce plan et qui forme un **angle droit** avec celui-ci.

Exemple :

La droite **a** est **perpendiculaire** au plan **AEF**.

Codage mathématique : $\mathbf{a} \perp \mathbf{AEF}$



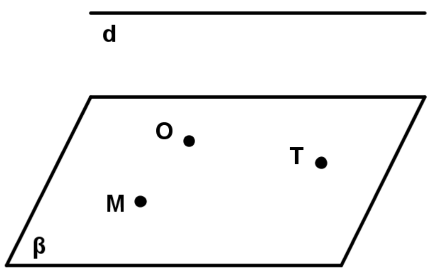

### 11.3.3. Une droite parallèle à un plan

Une droite **parallèle** à un plan est une droite qui, **non incluse** dans ce plan, **n’a pas de point d’intersection** avec le plan.

Exemple :

La droite **d** est **parallèle** au plan **β**.

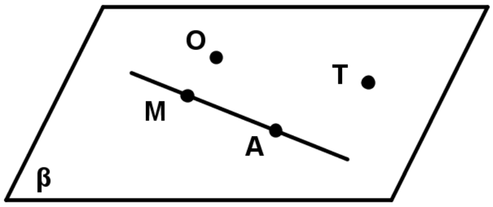
Codage mathématique : **d // β**



### 11.3.4. Une droite contenue dans un plan

Une droite **contenue** dans un plan est une droite **parallèle** à ce plan et telle que **deux points** quelconques de cette droite **appartiennent** au **plan**.

Exemple :




La droite **MA** est **contenue** dans le plan **β**.

Codage mathématique : **MA** $\subset$ **β**

# Les transformations du plan

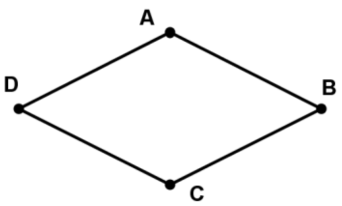
## 1. Les isométries et les similitudes

Il existe deux grands types de transformations du plan.

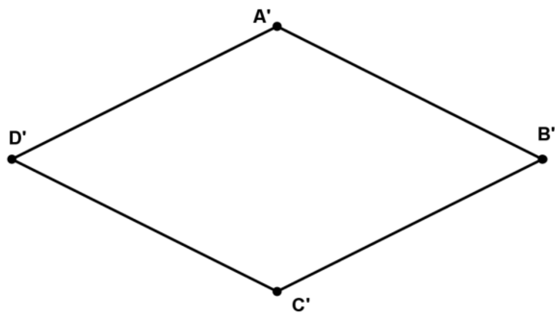
- ✓ Les **similitudes** : ce sont les **transformations** du plan qui **conservent** les **proportions** mais **pas** les **dimensions**. (Les figures sont agrandies ou réduites.)
- ✓ Les **isométries** : ce sont les **transformations** du plan qui **conservent** les **proportions** et **aussi** les **dimensions**.

Exemples :

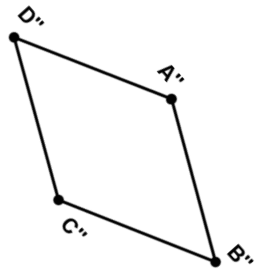
Soit le losange ABCD.



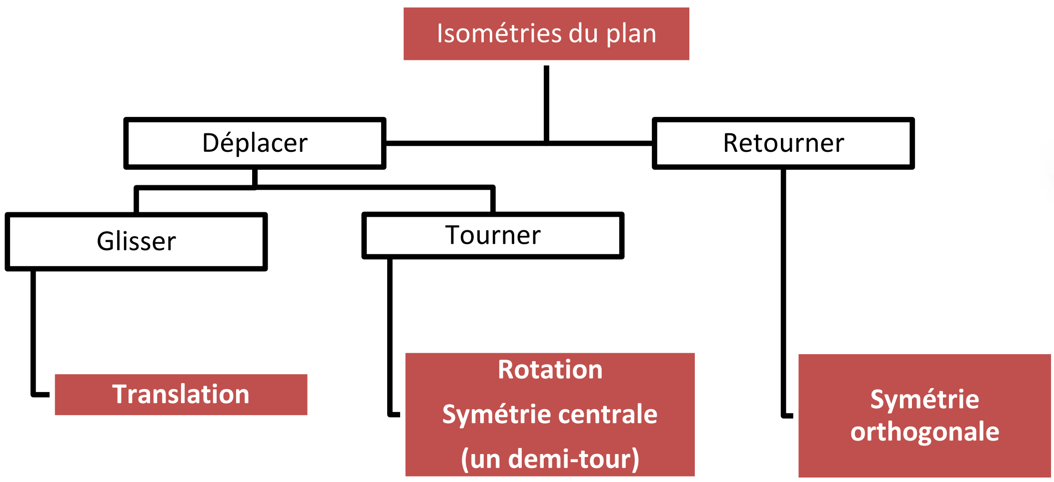

**A'B'C'D'** est l'image de ABCD par une **similitude** (agrandissement)




**A''B''C''D''** est l'image de ABCD par une **isométrie**



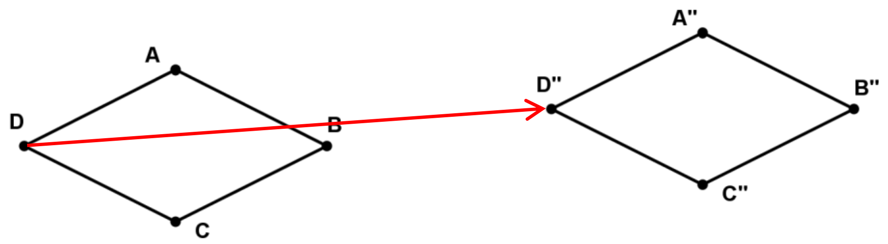

## 2. Organigramme des transformations du plan




## 3. Définition de deux figures isométriques

**Deux** figures sont **isométriques** si elles possèdent les **mêmes dimensions**.

Exemple :




ABCD et A''B''C''D'' sont deux figures **isométriques** car la translation de vecteur $\overrightarrow{DD''}$ applique ABCD sur A''B''C''D''.

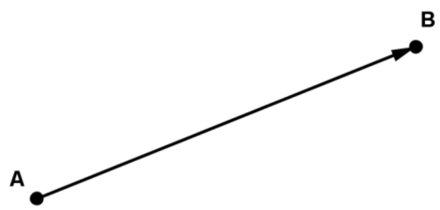
## 4. La construction aux instruments

### 4.1. La translation

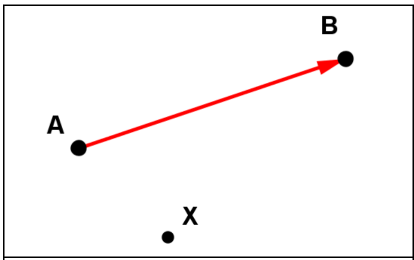
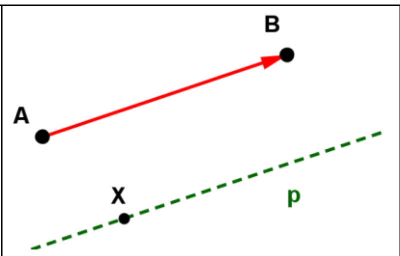
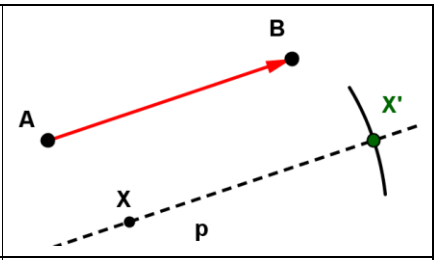
#### 4.1.1. Le vecteur

Un **vecteur** est un **segment** de droite **orienté** sur lequel on distingue une **origine** et une **extrémité**.
Un vecteur se définit par **trois composantes** :
- **sa direction** : celle de la droite qui porte le vecteur ;
- **son sens** : désigné par la flèche sur le vecteur ;
- **sa longueur** : la longueur du segment qui va de l'origine à l'extrémité.

Exemple : Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$**.**



### 4.1.2. La construction de l'image d'un point

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Soit le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ et le point X.<br><br>On veut construire l'image de X par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. | On trace la **droite parallèle** au vecteur $\overrightarrow{AB}$ passant par le point X. | On place le point **X'** en reportant la longueur $\overline{AB}$ sur cette droite parallèle à partir du point X, en respectant le **sens** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ . |

### 4.1.3. La construction de l'image d'un polygone

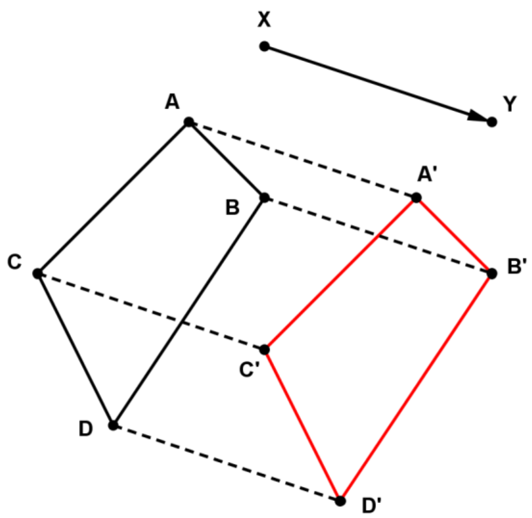
Pour construire l'image d'un polygone par une **translation** :

- ✓ on construit **l'image** de chaque **sommet** ;
- ✓ on **relier** les images entres elles, dans le même **ordre** que sur la figure de départ.

Exemple :

Soit **A'B'C'D'** qui est l'image de ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$.

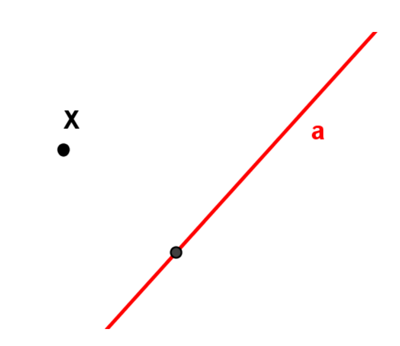
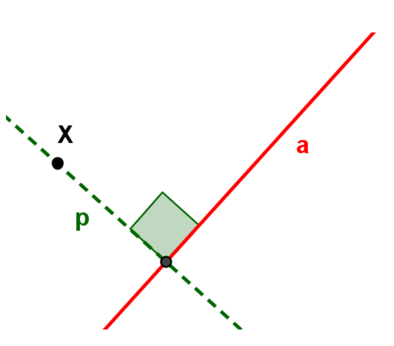
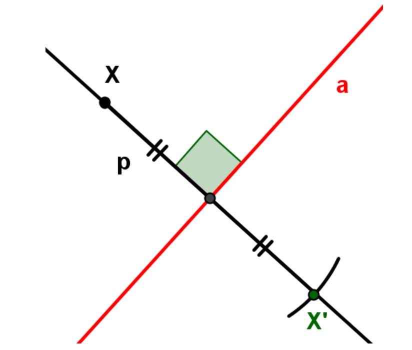
Codage mathématique : $t_{\overrightarrow{XY}}$ (ABCD) = A'B'C'D'




La translation de de vecteur nul ($t_{\overrightarrow{XX}}$) est la **transformation identique** qui laisse **fixes tous** les **points** du plan.

## 4.2. La symétrie orthogonale

### 4.2.1. La construction de l'image d'un point

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Soit la **droite a** et le point X. On veut construire l'image de X par la symétrie orthogonale d'axe a. | On trace la **droite perpendiculaire** à la droite a passant par le point X. | On place le point **X'** en reportant la distance du point X à la droite de l'autre de celle-ci sur cette droite perpendiculaire. |

### 4.2.2. La construction de l'image d'un polygone

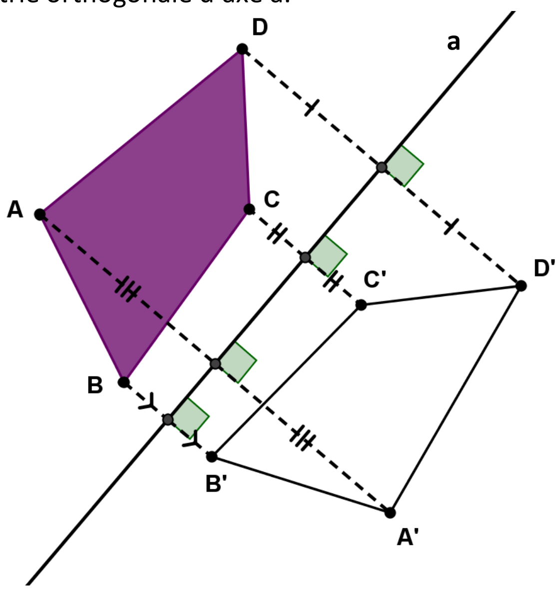
Pour construire l'image d'un polygone par une **symétrie orthogonale** :

- ✓ on construit **l'image** de chaque **sommet** ;
- ✓ on **relier** les images entres elles, dans le même **ordre** que sur la figure de départ.

Exemple :

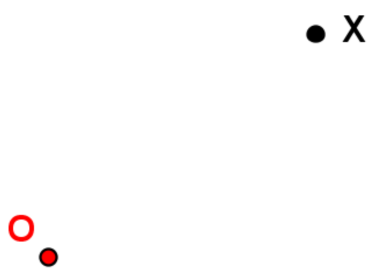
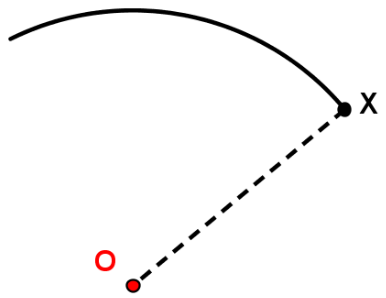
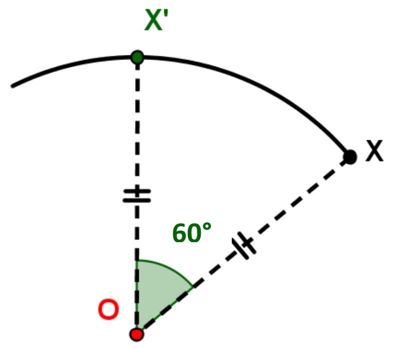
Soit **A'B'C'D'** qui est l'image de ABCD par la symétrie orthogonale d'axe a.

Codage mathématique : $s_a$ (ABCD) = A'B'C'D'



## 4.3. La rotation

### 4.3.1. La construction de l'image d'un point

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| **A construire** : l'image de X par la rotation de centre O et d'amplitude + 60°.<br>Soit le **point O** et le point X. | On trace un arc de cercle de centre O et de rayon $\overline{OX}$.<br>**Attention au sens !** | On trace l'angle $\hat{O}$ de 60° et dont [OX est le premier côté.<br>On place le point **X'** à l'intersection du deuxième côté et de l'arc de cercle. |

### 4.3.2. La construction de l'image d'un polygone

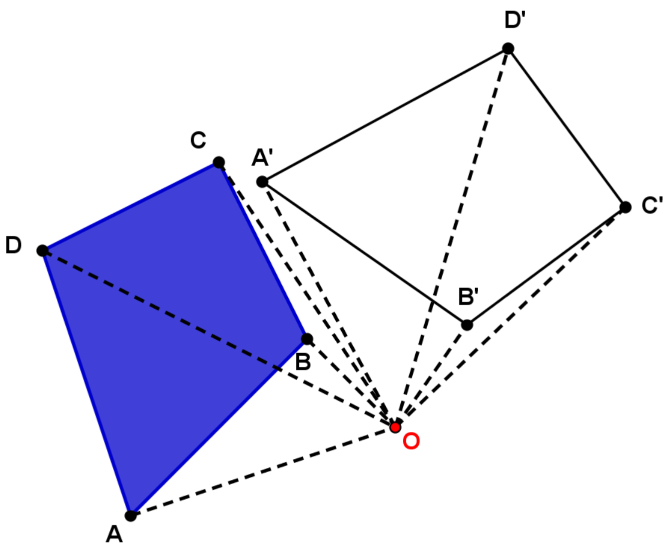
Pour construire l'image d'un polygone par une **rotation** :

- ✓ on construit **l'image** de chaque **sommet** ;
- ✓ on **relier** les images entres elles, dans le même **ordre** que sur la figure de départ.

Exemple :

Soit **A'B'C'D'** qui est l'image de ABCD par la rotation de centre O et de – 80°.

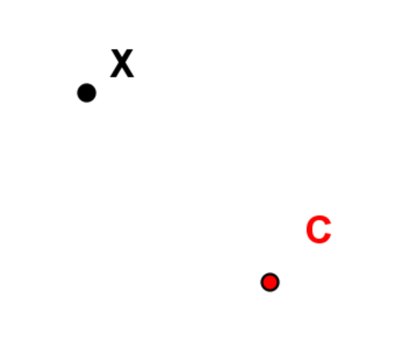
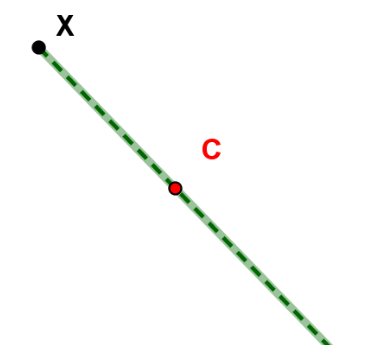
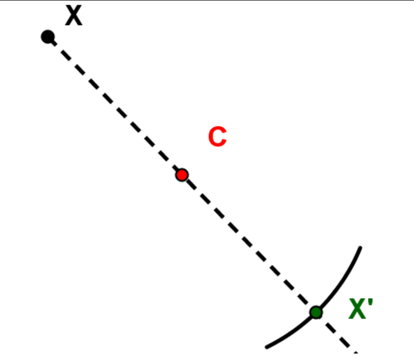
Codage mathématique : $r_{o,-80°}$ (ABCD) = A'B'C'D'




Une rotation d'amplitude :
$\alpha$ signifie que l'on tourne dans le **sens anti – horloger** ;
- $\alpha$ signifie que l'on tourne dans le **sens horloger**.

## 4.4. La symétrie centrale

### 4.4.1. La construction de l'image d'un point

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| **A construire** : l'image de X par la symétrie centrale de centre d Soit le **point C** et le point X. | On trace la **demi droite [XC**. | On place le point **X'** en reportant la distance du point X au point C sur la demi droite à partir du point C. |

### 4.4.2. La construction de l'image d'un polygone

Pour construire l'image d'un polygone par **symétrie centrale** :

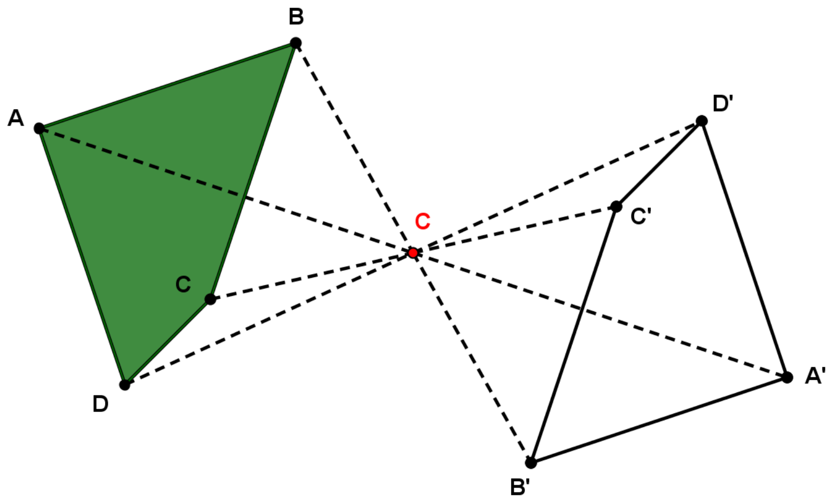
- ✓ on construit **l'image** de chaque **sommet** ;
- ✓ on **relier** les images entres elles, dans le même **ordre** que la figure de départ.

Exemple :

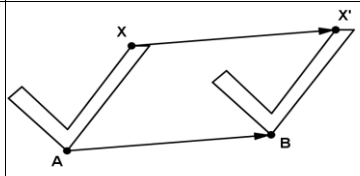
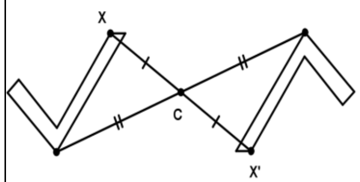
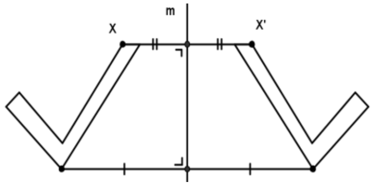
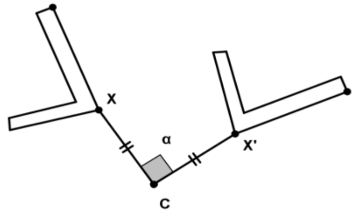
Soit **A'B'C'D'** qui est l'image de ABCD par la symétrie centrale de centre C.

Codage mathématique : $s_C$ (ABCD) = A'B'C'D'

C est le **milieu** des segments [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'].



## 5. Synthèse sur les transformations du plan

| | Translation | Symétrie centrale | Symétrie orthogonale | Rotation |
|---|---|---|---|---|
| **Mouvement** | Glisser | Tourner autour d'un point de + 180° ou – 180°. | Se retourner de l'autre côté d'une droite. | Tourner autour d'un point. |
| **Élément(s) caractéristique(s)** | Un vecteur | Un point appelé le centre | Une droite appelée l'axe | Le centre<br>L'amplitude de l'angle orienté. |
| **Notation** | La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AB}}}$ | La symétrie centrale de centre C se note $\boldsymbol{s_C}$ | La symétrie orthogonale d'axe m se note $\boldsymbol{s_m}$ | La rotation de centre C et d'angle orienté $\alpha$ se note $\boldsymbol{r_{C,\alpha}}$ |
| **Définition** | La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une transformation du plan telle que tous les segments orientés joignant un point à son image ont la même direction, le même sens et la même longueur que $\overrightarrow{AB}$. | La symétrie de centre C est une transformation du plan telle que C est le milieu de tout segment joignant un point à son image. | La symétrie d'axe m est une transformation du plan telle que m est la médiatrice de tout segment joignant un point à son image. | La rotation de centre C et d'angle orienté $\alpha$ est une transformation du plan telle que l'amplitude de l'angle au sommet $\widehat{XCX'}$ du triangle isocèle formé par le centre C, un point X et son image X' égale $\alpha$. |
| **Codage mathématique** | Soit A, B et X, trois points distincts du plan :<br>$t_{\overrightarrow{AB}}$ (X) = X' $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XX'}$ | Soit C et X, deux points distincts du plan :<br>$s_C$ (X) = X' $\Leftrightarrow$ $\lvert CX \rvert = \lvert CX' \rvert$<br>et C ∈ [XX'] | Soit X, un point du plan et m, une droite du plan :<br>$s_m$ (X) = X' $\Leftrightarrow$ $m \perp XX'$<br>et d(X, m) = d(X', m) | Soit C et X, deux points distincts du plan et $\alpha$, un angle orienté :<br>$r_{C,\alpha}$ (X) = X' $\Leftrightarrow$ $\lvert\widehat{XCX'}\rvert = \alpha$<br>et $\lvert CX \rvert = \lvert CX' \rvert$ |
| **Représentation** | <br> | <br> | <br> | <br> |
| **Point(s) fixe(s)** | Pour une translation **de vecteur nul** : tous les points du plan. | Le centre C | Tous les points de l'axe m | Le centre C<br>Tous les points du plan pour la rotation de 0°, + 360° et – 360°. |

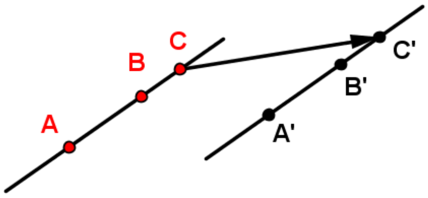
## 6. Les invariants des isométries

### 6.1. L'alignement des points

Les images de **trois points alignés** par une isométrie sont **trois points alignés**.

Exemple : Soit les points A, B et C alignés et leurs images A'B'C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Les points A', B', et C' sont **alignés**.

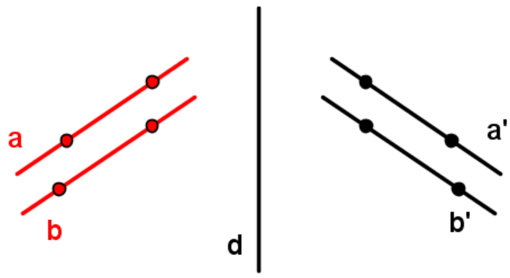



### 6.2. Le parallélisme des droites

Les images de **deux droites paralléles** par une isométrie sont **deux droites parallèles**.

Exemple : Soit les droites parallèles **a** et **b** et leurs images a' et b' par la symétrie orthogonale d'axe d.

Les droites a' et b' sont **parallèles**.

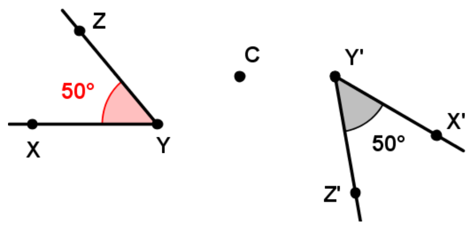



### 6.3. L'amplitude des angles

L'image **d'un angle** par une isométrie est **un angle de même amplitude**.

Exemple : Soit l'angle $\widehat{XYZ}$ d'une amplitude de 50° et son image $\widehat{X'Y'Z'}$ par la rotation de centre C et de + 150°.

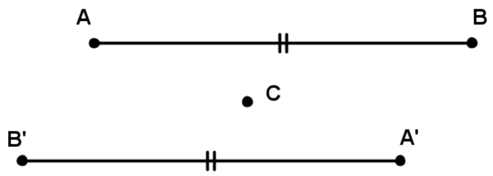
L'angle $\widehat{X'Y'Z'}$ a **la même amplitude** que l'angle $\widehat{XYZ}$.




## 6.4. La longueur des segments

L'image **d'un segment de droite** par une isométrie est **un segment de droite de même longueur**.

Exemple : Soit le segment de droite [AB] et son image le segment de droite [A'B'] par la symétrie centrale de centre C.

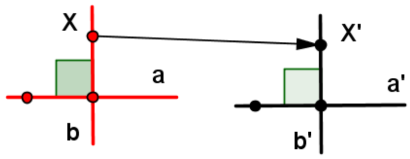



Les segments de droite [AB] et [A'B'] ont la même longueur.

## 6.5. La perpendicularité des droites

Les images de **deux droites perpendiculaires** par une isométrie sont **deux droites perpendiculaires**.

Exemple : Soit les droites perpendiculaires **a** et **b** et leurs images les droites **a'** et **b'** par la translation de vecteur $\overrightarrow{XX'}$.




Les droites a' et b' sont **perpendiculaires**.

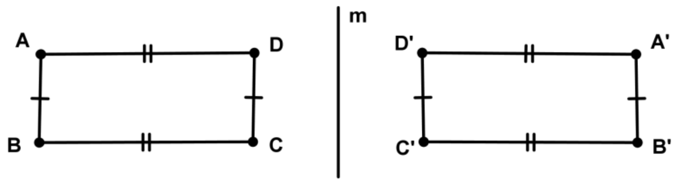
## 6.6. L'aire et le périmètre des figures

Une figure et son image par une isométrie ont le **même périmètre** et la **même aire**.

Exemple : Soit le rectangle ABCD et son image A'B'C'D' par la symétrie orthogonale d'axe m.

A'B'C'D' et ABCD ont :

- la **même aire** ;
- le **même périmètre**.

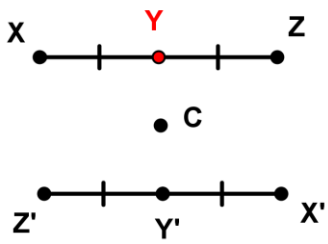



## 6.7. Le milieu d'un segment

L'image du **milieu d'un segment** par une isométrie est le **milieu de l'image du segment**.

Exemple : Soit le segment de droite [XZ] et le point **Y** milieu de ce segment.

Soit leurs images [X'Z'] et Y' par la symétrie centrale de centre C.




Le point Y' est également le milieu du segment de droite [X'Z'].

## 7. Les effets sur les coordonnées

| Transformations | Effetc sur les coordonnées d'un point (x, y) | Traduction en français |
|---|---|---|
| Symétrie orthogonale d'axe x | **(x ; – y)** | Prendre l'opposé de l'ordonnée et conserver l'abscisse. |
| Symétrie orthogonale d'axe y | **(– x ; y)** | Prendre l'opposé de l'abscisse et conserver l'ordonnée. |
| Symétrie centrale de centre O | **(– x ; – y)** | Prendre l'opposé de l'abscisse et l'opposé de l'ordonnée. |
| Translation de vecteur (0, b) | **(x ; y + b)** | Ajouter b à l'ordonnée et conserver l'abscisse. |
| Translation de vecteur (a, 0) | **(x + a ; y)** | Ajouter a à l'abscisse et conserver l'ordonnée. |
| Translation de vecteur (a, b) | **(x + a, ; y + b)** | Ajouter a à l'abscisse et b à l'ordonnée. |
| Rotation de centre O et d'amplitude + 90° | **(– y ; x)** | L'abscisse du point image est l'opposé de l'ordonnée du point de départ. L'ordonnée du point de image est l'abscisse du point de départ. Exemple : Le point (3 ; 2) a pour image le point (– 2 ; 3). |
| Rotation de centre O et d'amplitude – 90° | **(y ; – x)** | L'abscisse du point image est l'ordonnée du point de départ. L'ordonnée du point image est l'opposé de l'abscisse du point de départ. Exemple : Le point (3 ; 2) a pour image le point (3 ; – 2). |

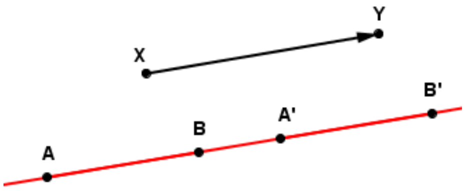
## 8. Les droites invariantes pour les isométries

### 8.1. Pour la translation

L'image d'une **droite parallèle au vecteur** est une droite confondue avec la droite de départ.

Exemple : Soit la droite AB parallèle au vecteur et son image la droite A'B' par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$.

Les droites AB et A'B' sont **confondues**.

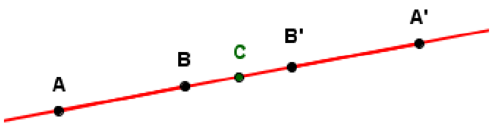



### 8.2. Pour la symétrie centrale

L'image d'une **droite passant par le centre de symétrie** est une droite confondue avec la droite de départ.

Exemple : Soit la droite **AB** passant par le centre **C** et son image la droite **A'B'** par la symétrie centrale de centre **C**.

Les droites **AB** et **A'B'** sont **confondues**.

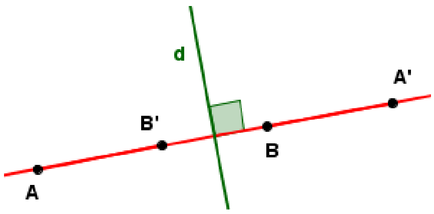



### 8.3. Pour la symétrie orthogonale

L'image d'une **droite perpendiculaire à l'axe de symétrie** est une droite confondue avec la droite de départ.

Exemple : Soit la droite **AB** perpendiculaire à l'axe de symétrie **d** et son image la droite A'B' par la symétrie d'axe **d**.

Les droites **AB** et **A'B'** sont **confondues**.

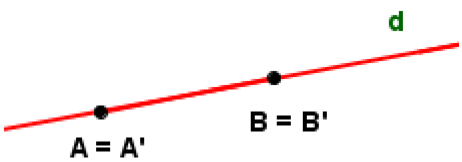



### 8.4. Pour la symétrie orthogonale

L'image d'une **droite confondue avec l'axe de symétrie** est une droite confondue avec la droite de départ.

Exemple : Soit la droite **AB** confondue avec l'axe de symétrie **d** et son image la droite **A'B'** par la symétrie d'axe **d**.

Les droites **AB** et **A'B'** sont **confondues**.



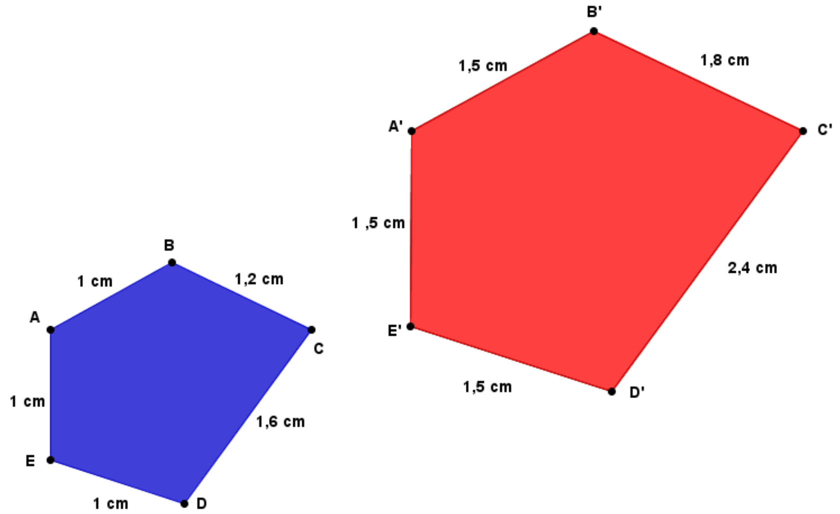
## 9. Agrandissements et réductions de figures

Deux figures sont images l'une de l'autre par un **agrandissement** ou une **réduction** si elles ont la **même forme** et si les **longueurs** de leurs **côtés homologues** sont **proportionnelles**.

Le **rapport** entre les **longueurs** de deux côtés homologues est appelé **coefficient d'agrandissement** (**de réduction**). Il se calcule grâce au rapport suivant :

$$\frac{longueur\ d'un\ côté\ de\ la\ figure\ agrandie\ ou\ réduite}{longueur\ du\ côté\ homologue\ de\ la\ figure\ de\ départ}$$

Exemple :




**A'B'C'D'E'** est un agrandissement **ABCDE** car : $\frac{1{,}5\ cm}{1\ cm} = \frac{1{,}8\ cm}{1{,}2\ cm} = \frac{2{,}4\ cm}{1{,}6\ cm} = 1{,}5$ avec **1,5 > 1**

ou

**ABCDE** est une réduction de **A'B'C'D'E'** car : $\frac{1\ cm}{1{,}5\ cm} = \frac{1{,}2\ cm}{1{,}8\ cm} = \frac{1{,}6\ cm}{2{,}4\ cm} = \frac{2}{3}$ avec $\mathbf{0 < \frac{2}{3} < 1}$.

Pour deux figures agrandies ou réduites avec un coefficient k :
- les **longueurs** et **périmètres** sont multipliées par **k**,
- les **aires** sont multipliées par $\mathbf{k^2}$.

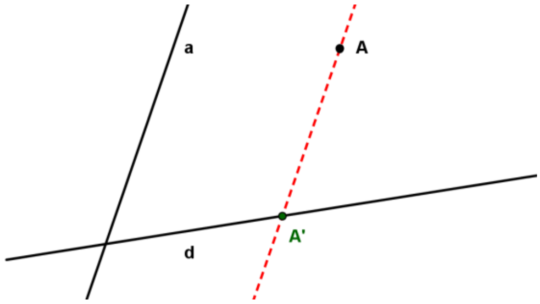
## 10. Les projections parallèles

Pour construire l'image d'un point A par la **projection** sur la **droite d**, **parallèlement** à la **droite a** :

- ✓ on trace la **droite parallèle** à la droite a et **passant** par le **point A** ;
- ✓ on **place** le point A' à **l'intersection** de cette **parallèle** et de la **droite d**.

Exemple : Soit le point A et les droites d et a.

Le point **A'** est la projection parallèlement à a du point A sur la droite d.

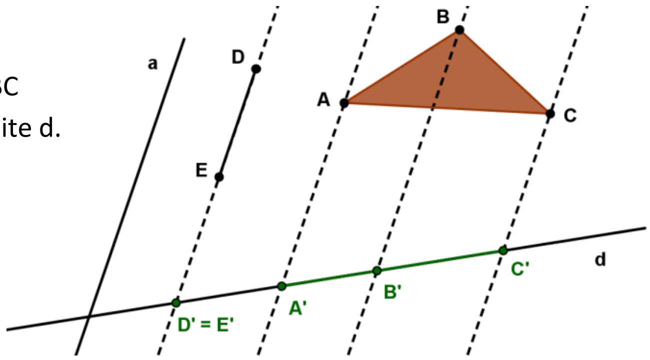



Pour construire **l'image** d'un **polygone** par la projection sur la droite d, parallèlement à la droite a, il suffit de **construire** l'image de ses **sommets**, puis de les **relier**.

Exemple : Soit le triangle **ABC** et les droites d et a.

Le segment de droite **[A'C']** est l'image du triangle ABC par la projection parallèlement à la droite a sur la droite d.

Le point **D' = E'** est l'image du segment de droit [DE] par la projection parallèlement à la droite a sur la droite d.



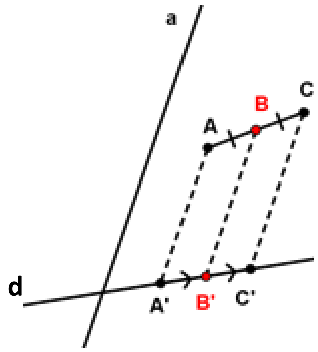

**L'image** d'un **segment** de droite **parallèle** à la **droite a** est un **point.**

## 10.1. Les propriétés

Les projections parallèles conservent **le milieu d'un segment**.

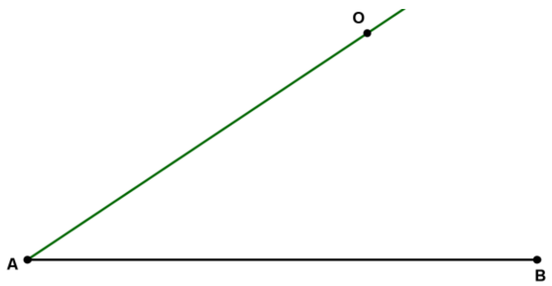
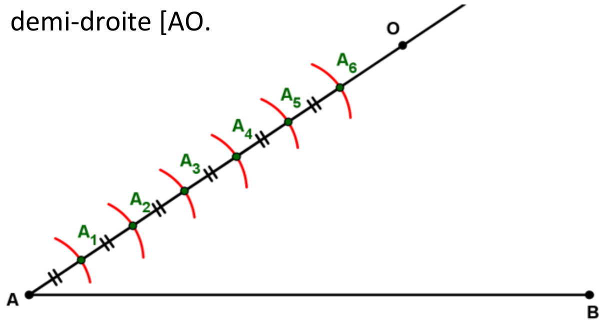
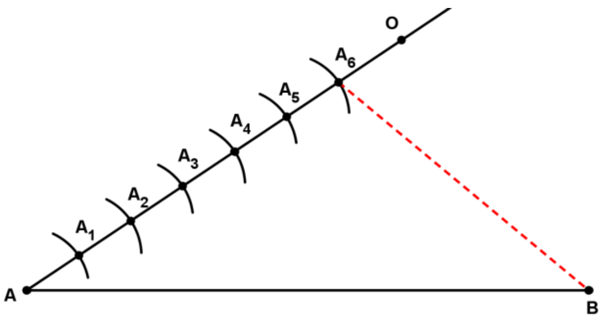
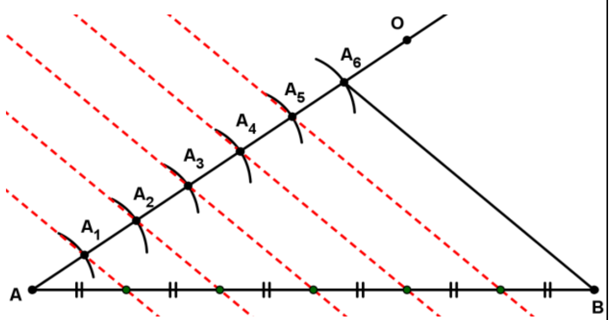
Exemples : Soit la projection sur la droite d, parallèlement à la droite a.

Le point **B** est le **milieu** du segment de droite [AC] et
le point **B'** est le **milieu** du segment de droite [A'C'].




## 10.2. Partager un segment en *n* parties égales

Soit à partager le segment [AB] en *n* segments de même longueur.

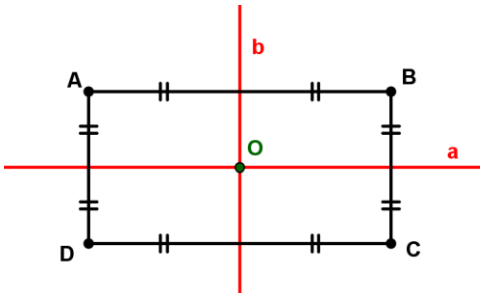
<table>
<tr>
<td>1) On trace une demi-droite [AO.<br><br></td>
<td>2) On reporte sur [AO n fois une même longueur à partir du point A. On nomme $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, … $A_n$ d'intersection des arcs de cercle et de la demi-droite [AO.<br><br></td>
</tr>
<tr>
<td>3) On relie les points $A_n$ et B.<br><br></td>
<td>4) On trace les droites parallèles à $A_nB$ passant par chaque point de la graduation. Les points d'intersection des parallèles avec [AB] délimitent les intervalles de même longueur.<br><br></td>
</tr>
</table>

# Les axes et centre de symétrie

## 1. Définitions

- ✓ Un **axe de symétrie** d'une figure est une **droite** d telle que l'image de cette figure par la **symétrie orthogonale** d'axe d est la figure elle – même.
- ✓ Un **centre de symétrie** d'une figure est le **point** O tel que l'image de cette figure par la **symétrie centrale** de centre O est la figure elle – même.

Exemple : Soit le rectangle ABCD.

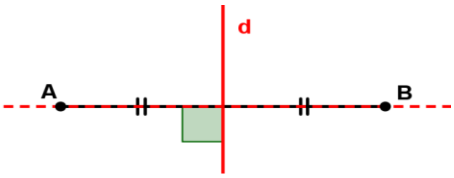
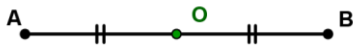
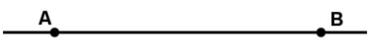
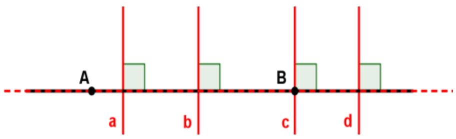
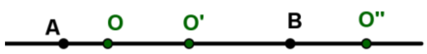


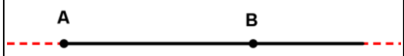
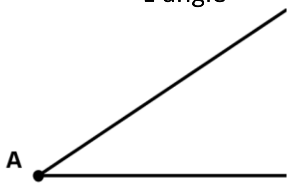
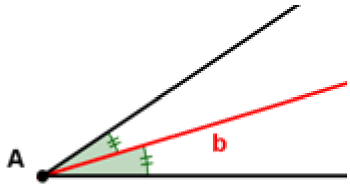
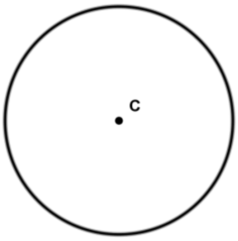
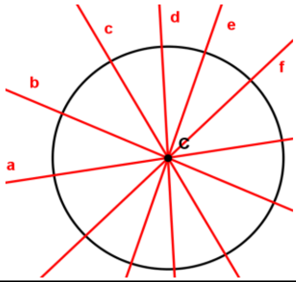
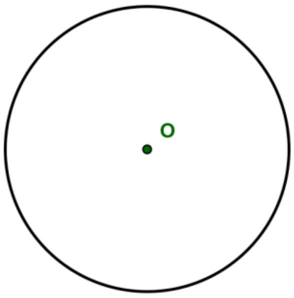
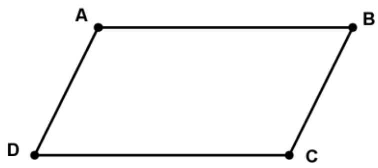
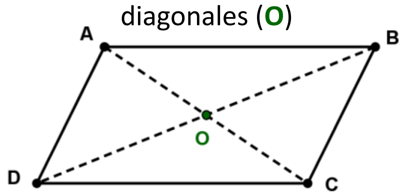
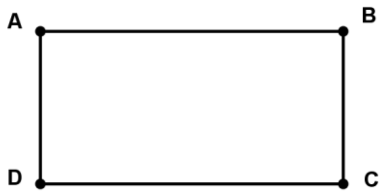
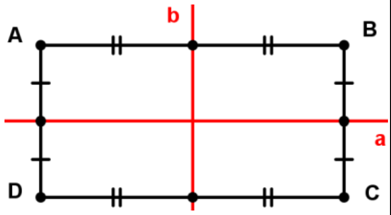
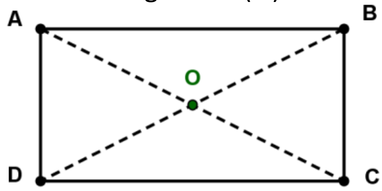

Les droites **a** et **b** sont les **axes de symétrie** du rectangle ABCD car $s_a$ (ABCD) = ABCD
et $s_b$ (ABCD) = ABCD.

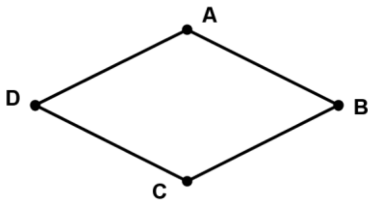
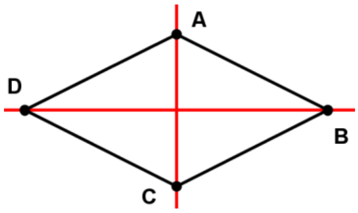
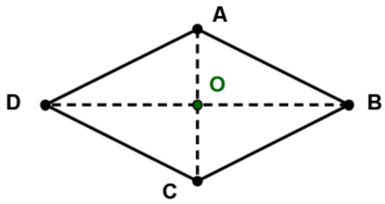
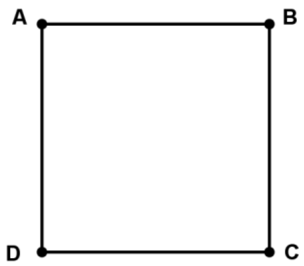
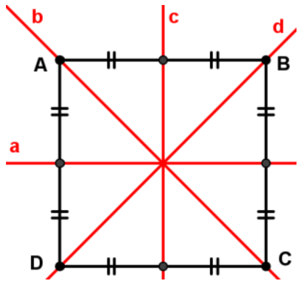
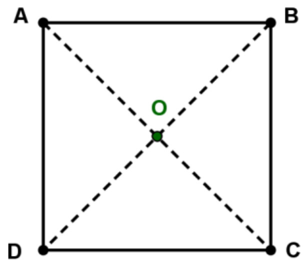
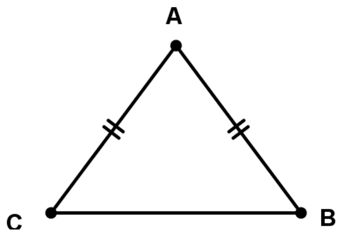
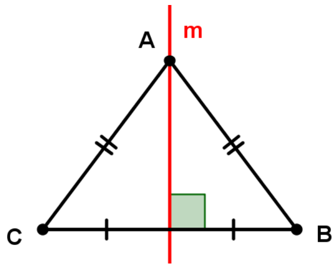
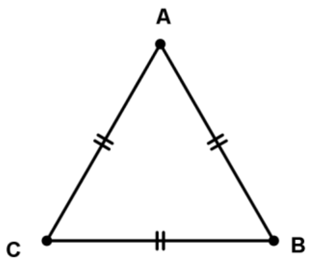
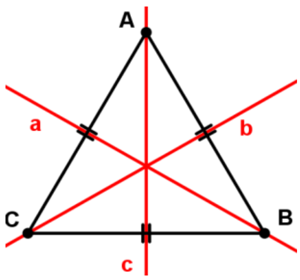
Le point **O** est le **centre de symétrie** du rectangle ABCD car $s_O$ (ABCD) = ABCD.

## 2. Les axes et centre de symétrie des figures usuelles

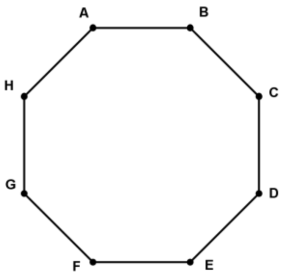
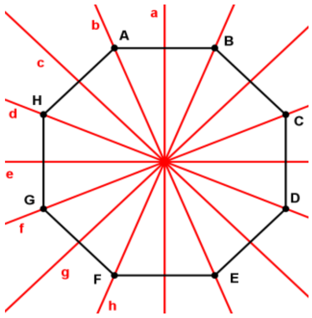
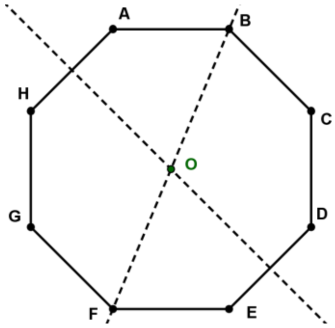
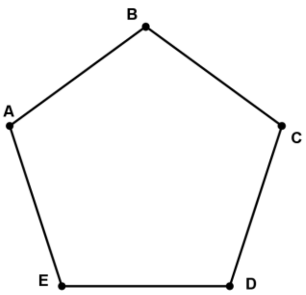
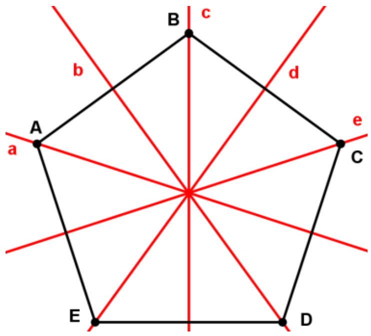
### 2.1. Le segment de droite

| Figure | Axe(s) de symétrie | Centre(s) de symétrie |
|---|---|---|
| Le segment de droite   | La médiatrice de ce segment (**d**) et la droite qui le contient (**AB**)   | Le milieu du segment (**O**)   |
| La droite   | La droite elle-même (**AB**) et toute droite qui lui est perpendiculaire (**a**, **b**, **c**, **d**, …)   | Tout point (**O**, **O'**, **O''**, …) de la droite   |

| | | |
|---|---|---|
| La demi – droite   | La droite (**AB**) qui contient la demi - droite   | **Aucun** |
| L'angle   | La bissectrice de l'angle (**b**)   | **Aucun** |
| Le cercle   | Tout diamètre du cercle (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, …)   | Le centre du cercle (**O**)   |
| Le parallélogramme   | **Aucun** | Le point d'intersection des diagonales (**O**)   |
| Le rectangle   | Les médianes du rectangle (**b** et **a**)   | Le point d'intersection des diagonales (**O**)   |

<table>
<tr>
<td>Le losange<br></td>
<td>Les diagonales du losange (AC et DB)<br></td>
<td>Le point d’intersection des diagonales (O)<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Le carré<br></td>
<td>Les diagonales (b et d) et les médianes (a et c) du carré<br></td>
<td>Le point d’intersection des diagonales (O)<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Le triangle isocèle<br></td>
<td>La médiatrice de la base (m)<br></td>
<td>Aucun</td>
</tr>
<tr>
<td>Le triangle équilatéral<br></td>
<td>Les médianes / hauteurs du triangle (a, b et c)<br></td>
<td>Aucun</td>
</tr>
</table>

Une figure qui admet un nombre **pair** ($\neq 0$) **d’axes** de symétrie admet un **centre** de symétrie, situé à **l’intersection** des **axes**.

<table>
<tr>
<td>Le polygone régulier<br>(nombre pair de côtés)<br></td>
<td>Les bissectrices des angles et les médiatrices des côtés.<br></td>
<td>Le point d'intersection des axes de symétrie (**O**)<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Le polygone régulier<br>(nombre impair de côtés)<br></td>
<td>Les médiatrices des côtés<br></td>
<td>**Aucun**</td>
</tr>
</table>

## 3. Les polygones réguliers invariants et les rotations

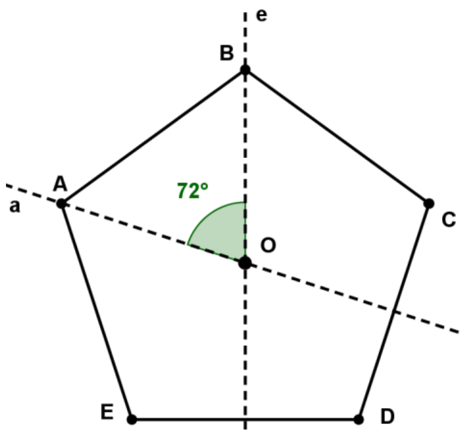
Un polygone **régulier** à **n** côtés est **invariant** pour toute **rotation** dont :
- le **centre** est **l'intersection** des **médiatrices** des côtés,
- **l'amplitude** de l'angle est un **multiple** de $\frac{360°}{n}$**.**

Exemple :
Soit le pentagone ABCDE.

Le centre de la rotation est le point O.

L'amplitude de la rotation = $\frac{360°}{5}$ = **72°**

Si on effectue une rotation de centre O et d'amplitude + / – 72° (ou un multiple de 72) du pentagone ABCDE, **l'image** de ce pentagone sera **superposée** à ABCDE.



# Les lieux géométriques

## 1. Le lieu géométrique

Un **lieu géométrique** est **l'ensemble** des **points** qui possèdent une **même propriété**.

## 2. La distance entre deux points

La **distance** entre **deux points** est la **longueur** du **segment de droite** dont les deux points sont les extrémités.

Exemple : Soit les points A et B.

La **distance** du point A au point B égale la **longueur** du segment de droite [AB].
Longueur du segment de droite [AB] = **3,15 cm**

Codage mathématique : $\delta$ (A, B) = 3,15 cm


## 3. La distance par rapport à une droite

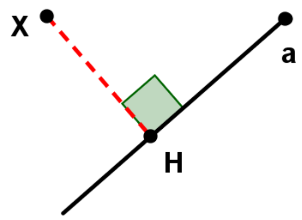
### 3.1. La distance d'un point à une droite

La **distance d'un point à une droite** est la distance entre ce point et le pied de la **perpendiculaire** à la droite issue de ce point.

Exemple : Soit le point X et la droite a.

La distance entre le point X et la droite a est égale à $\overline{XH}$ où H est le pied de la perpendiculaire à a issue de X.

Codage mathématique : $\delta$ (X, a)

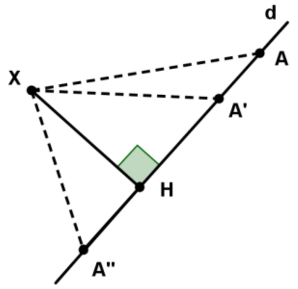


La **distance d'un point à une droite** est le plus courte distance entre ce point et n'importe quel point de cette droite.

Exemple : Soit le point X et la droite d.

Quel que soit le point A (différent du point H) sur la droite d,

$\overline{XH} < \overline{XA}$



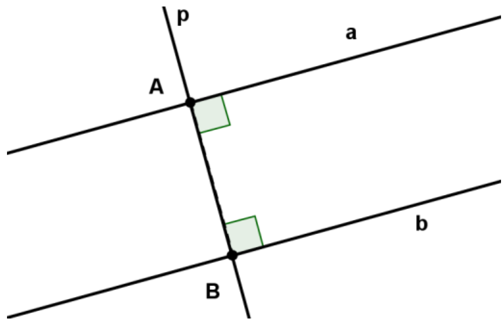

## 3.2. La distance entre deux droites parallèles

La **distance entre deux droites parallèles** est la **distance** entre les **points d'intersection** de ces parallèles avec n'importe quelle droite **perpendiculaire commune**.

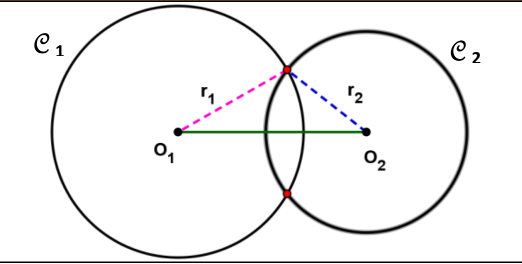
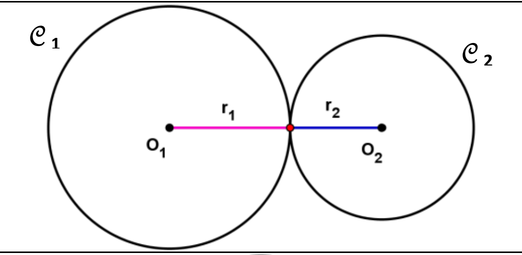
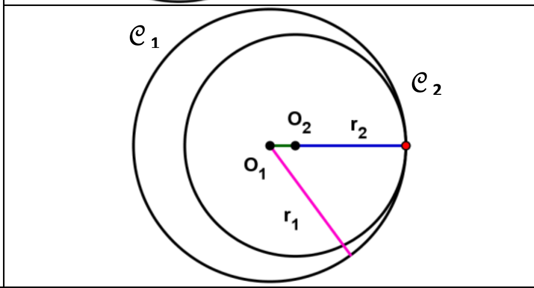
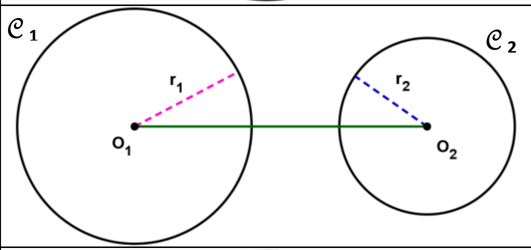
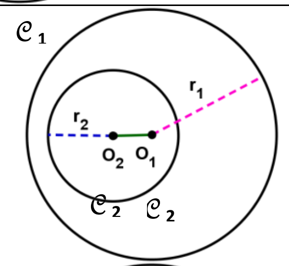
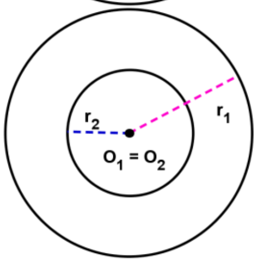
Exemple : Soit les droites parallèles a et b et la droite p perpendiculaire à celles-ci.

La distance entre les droites a et b est égale à la longueur du segment de droite [AB].

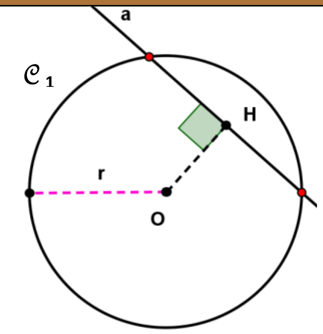
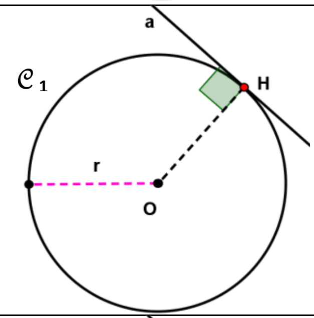
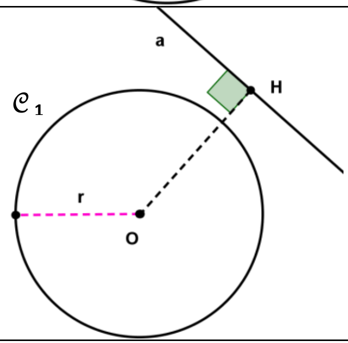
Codage mathématique : $\delta$ (a, b) = $\overline{AB}$




## 4. Les positions relatives de deux cercles

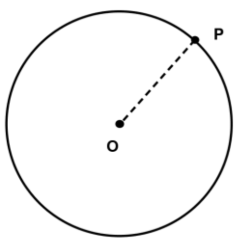
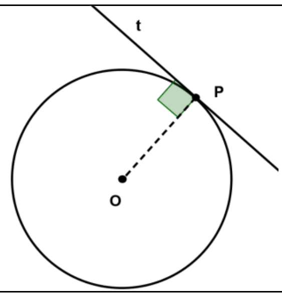
| Nombre de points d'intersection | Représentation géométrique | Position relative |
|---|---|---|
| **2** points **d'intersection** |  | **Les cercles sont sécants.**<br>La distance entre les centres est comprise entre la différence positive et la somme des rayons.<br>$\lvert r_1 - r_2 \rvert < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ |
| **1 seul** point **d'intersection** |  | **Les cercles sont tangents extérieurement.**<br>La distance entre les centres est égale à la somme des rayons.<br>$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ |
| |  | **Les cercles sont tangents intérieurement.**<br>La distance entre les cercles est égale à la différence positive des rayons.<br>$\overline{O_1O_2} = \lvert r_1 - r_2 \rvert$ |
| **Aucun** point **d'intersection** |  | **Les cercles sont disjoints extérieurement.**<br>La distance entre les centres est supérieure à la somme des rayons.<br>$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ |
| | <br> | **Les cercles sont disjoints intérieurement.**<br>La distance entre les centres est inférieure à la différence positive des rayons.<br>$\overline{O_1O_2} < \lvert r_1 - r_2 \rvert$<br><br><u>Cas particuliers</u> : **les cercles sont concentriques**<br>La distance entre les centres est nulle.<br>$\overline{O_1O_2} = 0$ |

## 5. Les positions relatives d'un cercle et d'une droite

| Nombre de points d'intersection | Représentation géométrique | Position relative |
|---|---|---|
| **2** points **d'intersection** |  | La droite est **sécante** au cercle.<br><br>La distance entre le centre du cercle et la droite est plus petite que le rayon.<br><br>$\delta(O, a) = \overline{OH} < r$ |
| **1 seul** point **d'intersection** |  | La droite est **tangente** au cercle.<br><br>La distance entre le centre du cercle et la droite est égale au rayon.<br><br>$\delta(O, a) = \overline{OH} = r$ |
| **Aucun** point **d'intersection** |  | La droite est **extérieure** au cercle.<br><br>La distance entre le centre du cercle et la droite est plus grande que le rayon.<br><br>$\delta(O, a) = \overline{OH} > r$ |

La **tangente** à un cercle est **perpendiculaire au rayon** en son point de contact.

### 5.1. La construction de la tangente en un point d'un cercle

| | |
|---|---|
|  |  |
| On **trace** le rayon [OP]. | On trace la **droite perpendiculaire** au segment [OP] passant par P.<br>Cette droite est la tangente t. |

## 6. Les propriétés de la médiatrice

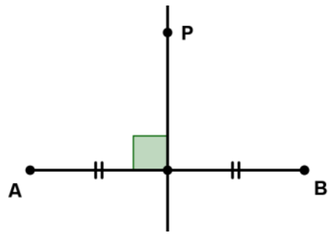
La **médiatrice** d'un segment est le **lieu** des **points équidistants** des extrémités de ce segment.

- **Si** un point **appartient** à la **médiatrice** d'un segment, **alors** il est **équidistant** des **extrémités** de celui-ci ; **(1)**

et

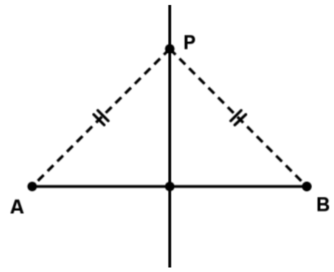
- **si** un point est **équidistant** des **extrémités** d'un segment, **alors** il **appartient** à la **médiatrice** de celui-ci. **(2)**

**(1)** **SI**



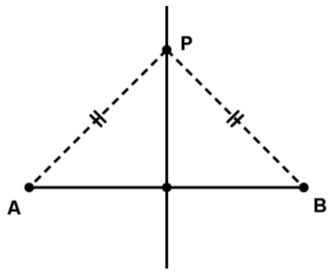

Le point appartient à la médiatrice de [AB].

**ALORS**



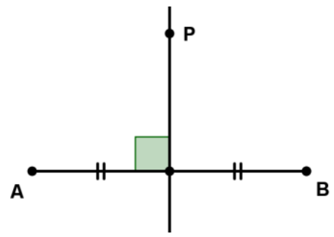

$\overline{AP} = \overline{BP}$

**(2)** **SI**




$\overline{AP} = \overline{BP}$

**ALORS**




Le point appartient à la médiatrice de [AB].

## 7. Les propriétés de la bissectrice

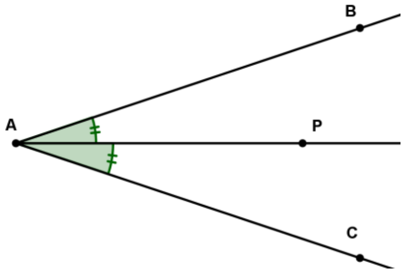
La **bissectrice** d'un angle est le **lieu** des **points équidistants** des côtés de cet angle.

- **Si** un point **appartient** à la **bissectrice** d'un angle, **alors** il est **équidistant** des **côtés** de celui-ci ; **(1)**

et

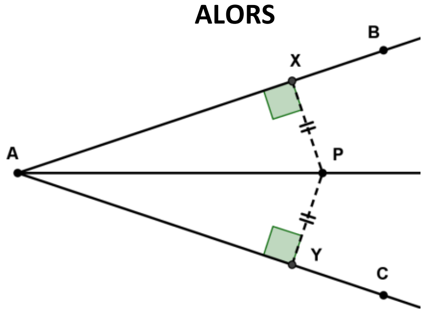
- **si** un point est **équidistant** des **côtés** d'un angle, **alors** il **appartient** à la **bissectrice** de celui-ci. **(2)**

**(1)** **SI**



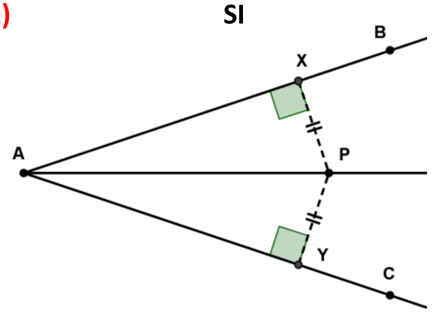

Le point appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

**ALORS**



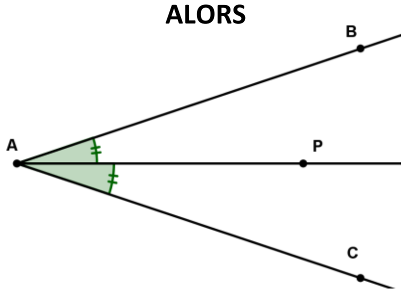

$\delta$ (P, AB) = $\delta$ (P, AC)

**(2)** **SI**



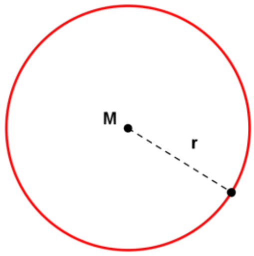
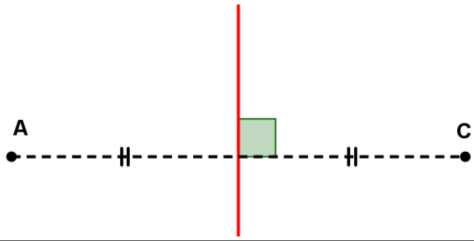
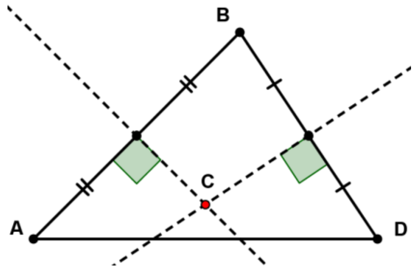
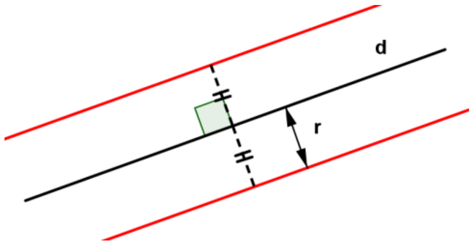
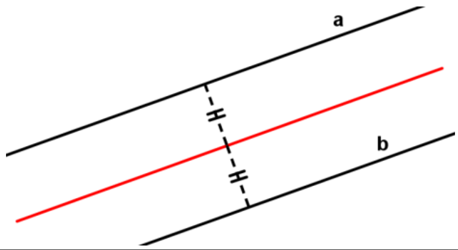
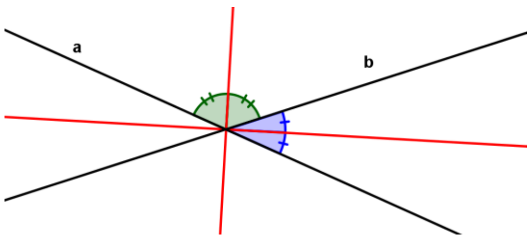

$\delta$ (P, AB) = $\delta$ (P, AC)

**ALORS**




Le point appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

## 8. Les lieux de références

| Définition | Représentations |
|---|---|
| Le lieu géométrique des points du plan situés **à une distance *r* d'un point fixe *M***<br>est<br>**le cercle de centre *M* et de rayon *r*.** |  |
| Le lieu géométrique des points du plan situés<br>**à égale distance de deux points distincts donnés**<br>est<br>**la médiatrice du segment de droite dont ces deux points sont les extrémités.** |  |
| Le lieu géométrique des points du plan situés<br>**à égale distance de trois points distincts non alignés**<br>est<br>**le centre du cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points.** |  |
| Le lieu géométrique des points du plan situés<br>**à une distance *r* d'une droite donnée *d***<br>est<br>**le couple de droites parallèles à *d* situées de part et d'autre de *d*, à la distance *r* de *d*.** |  |
| Le lieu géométrique des points du plan situés<br>**à égale distance de deux droites parallèles**<br>est<br>**la parallèle aux deux droites équidistantes de celles-ci.**<br>(Appelé **axe médian** du couple de droites parallèles) |  |
| Le lieu géométrique des points du plan situés<br>**à égale distance de deux droites sécantes**<br>est<br>**le couple de bissectrices des angles formés par les deux droites sécantes.** |  |